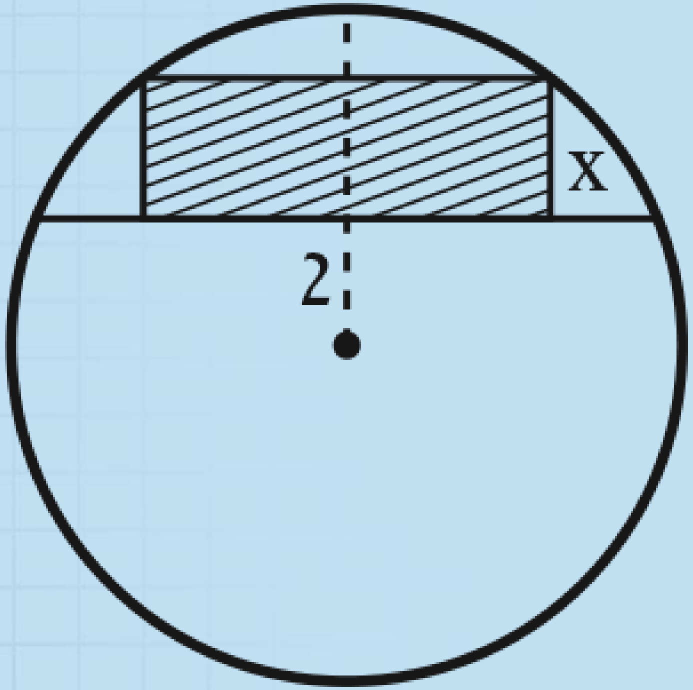
פתרון תרגיל
בעיות קיצון
בהנדסת המישור

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 199, ת. 49

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

השאלה

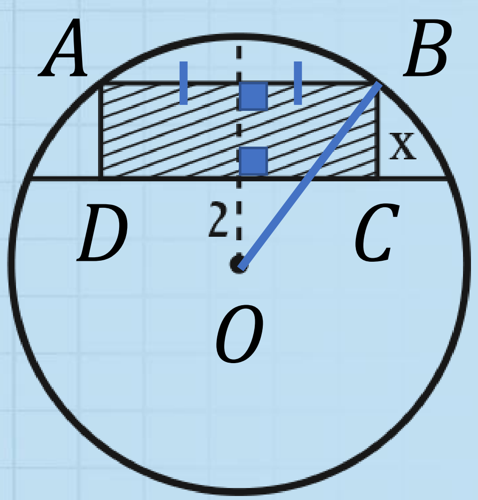


49) במעגל שרדיוסו 12 ס"מ עובר מיתר במרחק של 2 ס"מ מהמרכז. נסמן את אחת מצלעות המלבן ב-x. (ראה את הסימון בציור).

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון



אם הקטע שאורכו 2 ס"מ הוא מרחק מרכז המעגל מהמיתר אז הוא מאונך למיתר

מכיוון שהמרובע הנתון הוא מלבן וצלעותיו הנגדיות מקבילות אז נוצרת גם זווית ישרה בין הרדיוס המקווקו לבין צלעו השנייה של המלבן

קטע היוצא ממרכז המעגל ומאונך למיתר גם חוצה את המיתר

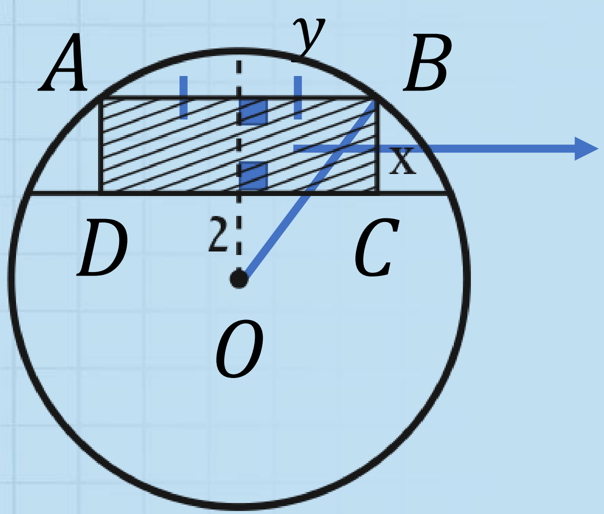
נעביר בניית עזר רדיוס אל קדקוד B של המלבן

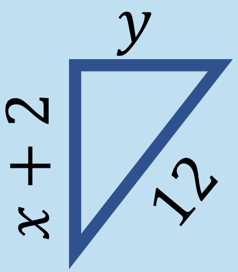
מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון

תחום הבעיה: $0 < x < 10$

נביט במשולש ישר הזווית שנוצר





לפי משפט פיתגורס:

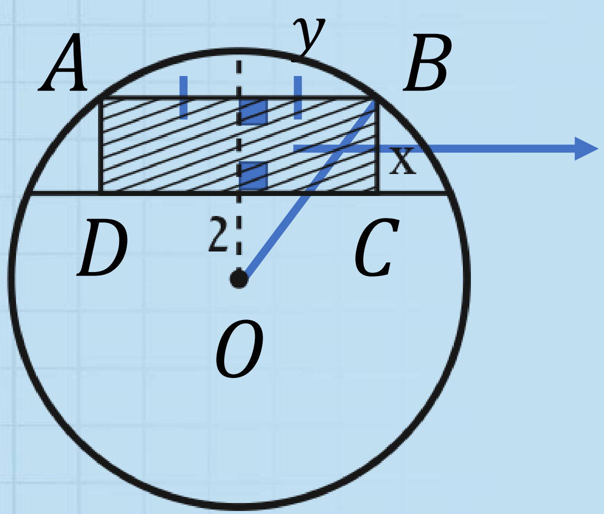
$$(x+2)^2 + y^2 = 12^2$$

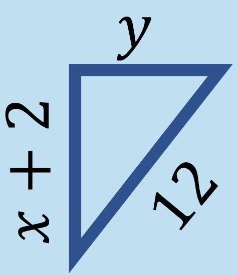
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 144$$

$$y^2 = 140 - 4x - x^2 \qquad y = \sqrt{140 - 4x - x^2}$$

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון





ניצב ראשון: $x+2$

ניצב שני: $\sqrt{140-4x-x^2}$

צלעות המלבן: $2\sqrt{140-4x-x^2}$, x

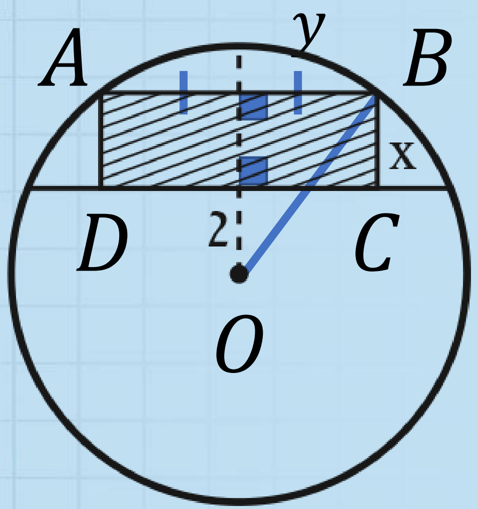
שטח המלבן: $S=2y\cdot x=2\sqrt{140-4x-x^2}\cdot x$

$0<x<10$

$S=2x\sqrt{140-4x-x^2}$

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון



שטח המלבן: $S = 2x\sqrt{140 - 4x - x^2}$

נוכל למצוא ערך קיצון ל- S^2 כדי לפשט את הבעיה.

$$S^2 = 4x^2(140 - 4x - x^2) = 4(140x^2 - 4x^3 - x^4)$$

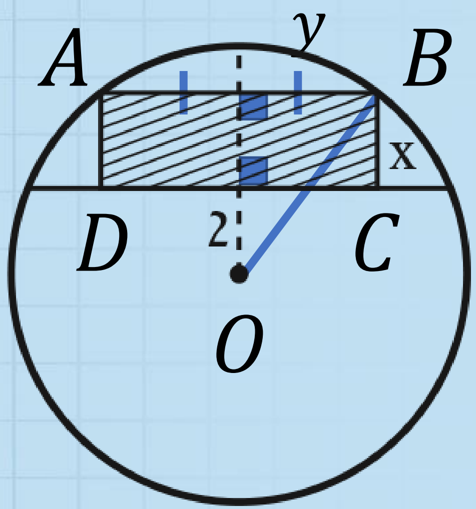
נגזור את S^2 ונשווה את הנגזרת לאפס כדי למצוא ערך קיצון

$0 < x < 10$

$$[4(140x^2 - 4x^3 - x^4)]' = 4(280x - 12x^2 - 4x^3) = 0$$

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון



$$0 < x < 10$$

$$280x - 12x^2 - 4x^3 = 0$$

$$-4x(x^2 + 3x - 70) = 0$$

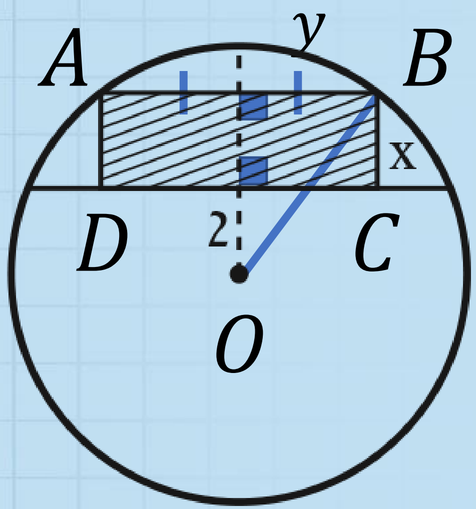
$$-4x(x + 10)(x - 7) = 0$$

$\cancel{x = 0}$ $\cancel{x = -10}$ $x = 7$

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון

שטח המלבן: $S = 2x\sqrt{140 - 4x - x^2}$



$$x = 7$$

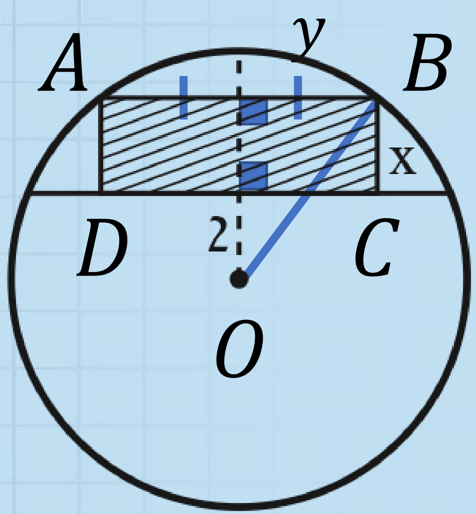
$$0 < x < 10$$

$S(6) = 107.33$ $S(7) = 111.12$ $S(8) = 106.13$

מקסימום

מצא את x עבורו המלבן החסום הוא בעל שטח מקסימלי.

פתרון



כאשר 7 ס"מ $= x$ אז שטח המלבן מקסימלי

בהצלחה