# פתרון תרגיל

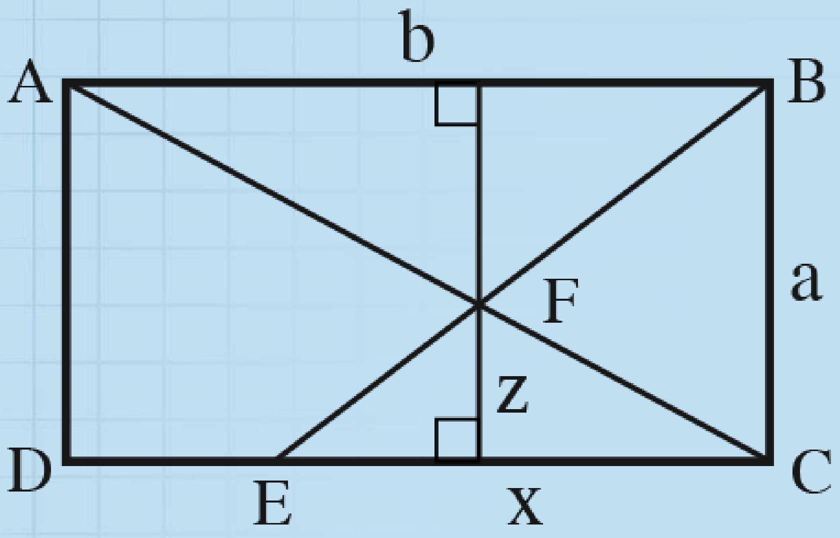
## בעיות קיצון בהנדסת המישור

**מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2**

**481 , עמ' 197, ת. 40**

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

# השאלה



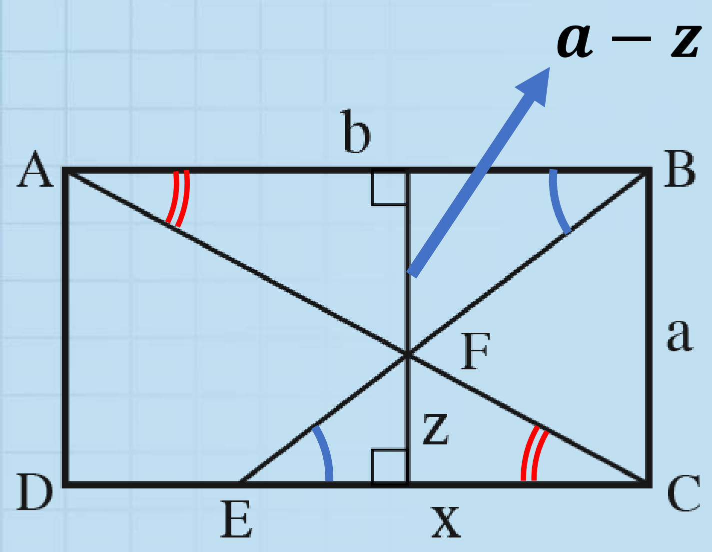

**40)** במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: $AB = b$, $BC = a$. E היא נקודה על DC. הקטע BE חותך את האלכסון AC בנקודה F. נסמן ב-x את הקטע CE וב-z את הגובה לצלע CE במשולש CFE.

א. הבע את z באמצעות a, b ו-x. (**הדרכה:** היעזר בדמיון המשולשים CFE ו-AFB והסתמך על כך שבמשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון).

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE = (\sqrt{2} - 1)b$.

א. הבע את z באמצעות a, b ו-x.

# פתרון




(**הדרכה:** היעזר בדמיון המשולשים CFE ו-AFB והסתמך על כך שבמשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון).

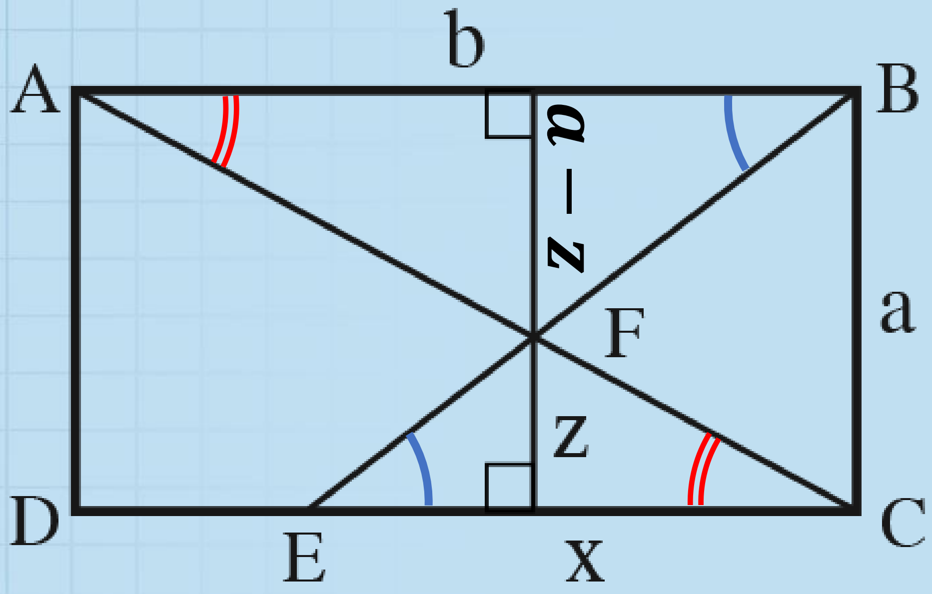
$\Delta AFB \sim \Delta CFE$ לפי משפט דמיון זווית זווית

במשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון

$$\frac{AB}{EC}=\frac{a-z}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{x}=\frac{a-z}{z}$$

א. הבע את z באמצעות a, b ו-x.

# פתרון




$$\frac{b}{x} = \frac{a-z}{z} \quad /\cdot xz$$

$$bz = x(a-z)$$

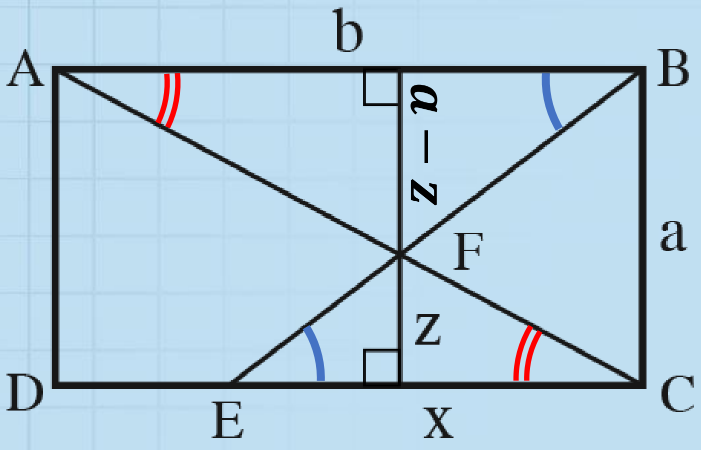
$$bz = ax - xz$$

$$bz + xz = ax$$

$$z(b+x) = ax \ /:(b+x) \longrightarrow z = \frac{ax}{b+x}$$

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE=(\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון




$$S_{\Delta AFB}=\frac{b(a-z)}{2}\qquad S_{\Delta EFC}=\frac{xz}{2}$$

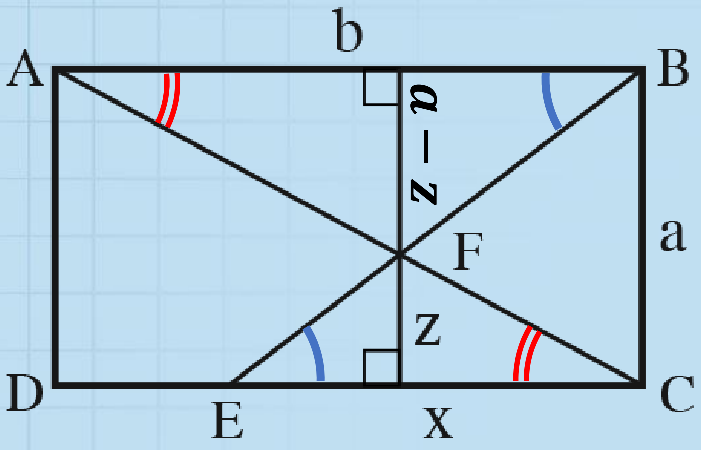
$$S_{\Delta AFB}+S_{\Delta EFC}=\frac{ab-bz+xz}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}bz+\frac{1}{2}xz=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b\cdot\frac{ax}{b+x}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{ax}{b+x}$$

$$=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b\cdot\frac{ax}{b+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ax^2}{b+x}$$

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE = (\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון




$$f(x) = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b \cdot \frac{ax}{b+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ax^2}{b+x}$$

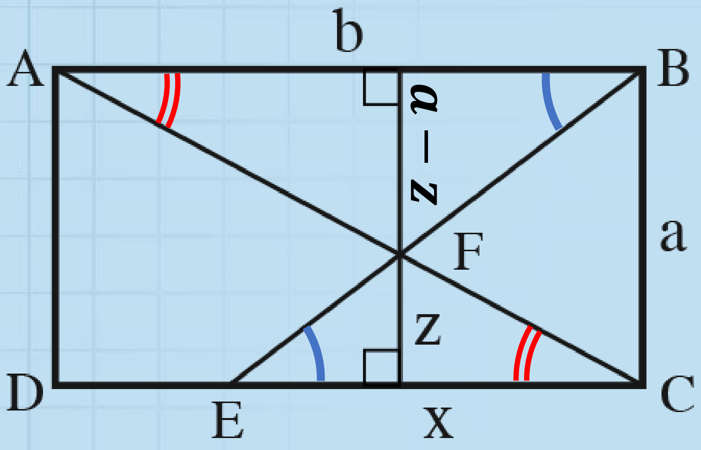
$$= \frac{1}{2}a\left(b + \frac{-bx}{b+x} + \frac{x^2}{b+x}\right) = \frac{1}{2}a\left(b + \frac{x^2 - bx}{b+x}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a\left(b + \frac{x^2 - bx}{b+x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}a\left(\frac{(2x-b)(b+x) - (x^2-bx) \cdot 1}{(b+x)^2}\right) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2bx + 2x^2 - b^2 - bx - x^2 + bx}{(b+x)^2}$$

ב.  הוכח שסכום שטחי המשולשים  CFE  ו-AFB  הוא מינימלי כאשר  $CE = (\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון

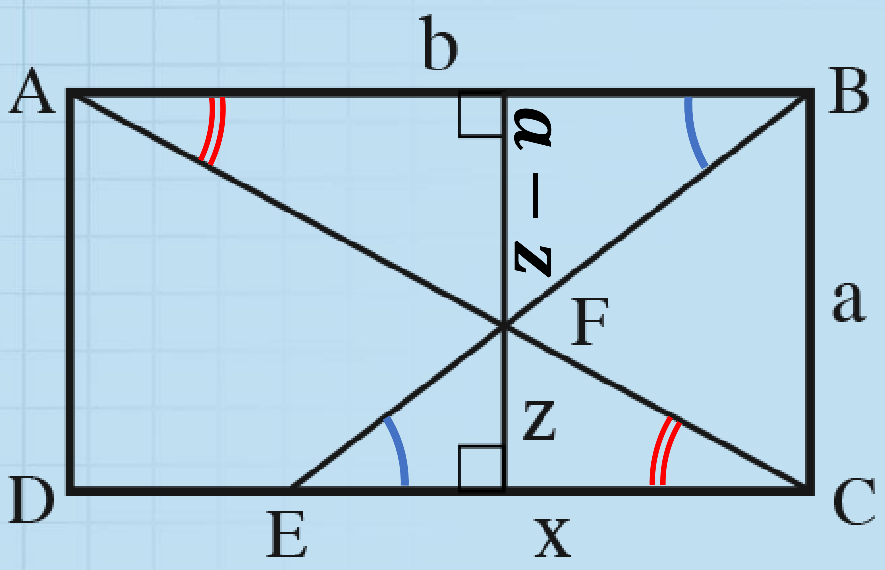



$$f'(x) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2bx + 2x^2 - b^2 - bx - x^2 + bx}{(b+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}a \cdot \frac{2bx + x^2 - b^2}{(b+x)^2}$$

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE = (\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון



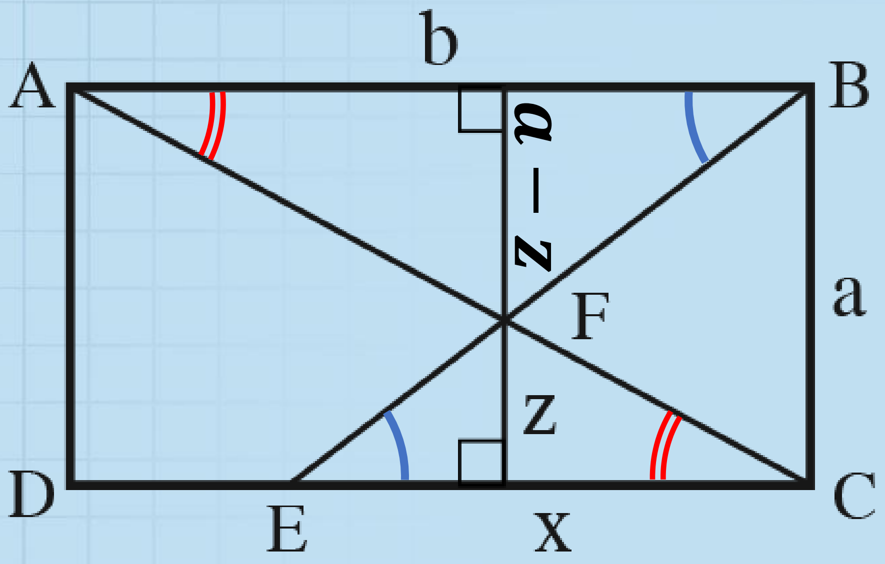

$$f'(x) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2bx + x^2 - b^2}{(b+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{x^2 + 2bx - b^2}{(b+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{x^2 + 2bx - b^2}{(b+x)^2} = 0$$

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE = (\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון



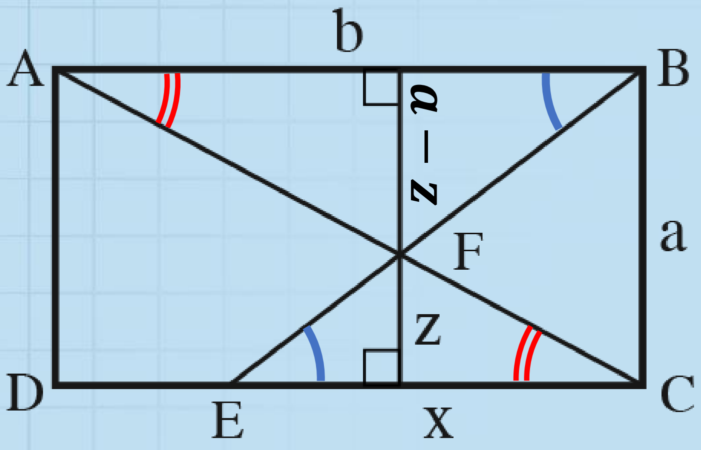

$$f'(x) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{x^2+2bx-b^2}{(b+x)^2} = 0$$

$$x^2+2bx-b^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2+4b^2}}{2} = \frac{-2b \pm \sqrt{8b^2}}{2} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{2}b}{2} = -b \pm \sqrt{2}b$$

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE = (\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון




$$f'(x) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{x^2 + 2bx - b^2}{(b+x)^2}$$

$$\cancel{x = -b - \sqrt{2}b} \qquad x = -b + \sqrt{2}b$$

$$x = b\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

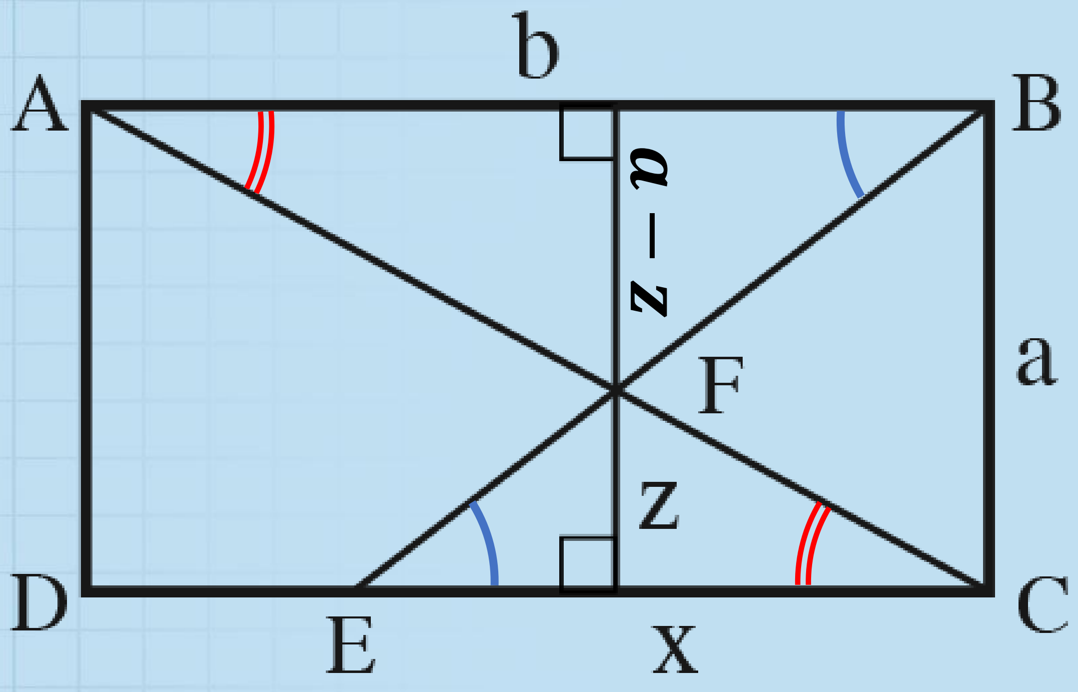
נגזרת(מונה)= $(2x + 2b)$

$$x = b\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

נגזרת(מונה)= $2b\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2b = 2b\sqrt{2} - 2b + 2b = 2b\sqrt{2} > 0$

ב. הוכח שסכום שטחי המשולשים CFE ו-AFB הוא מינימלי כאשר $CE = (\sqrt{2}-1)b$.

# פתרון




כאשר $x = b\left(\sqrt{2} - 1\right)$

סכום שטחי המשולשים מינימלי

בהצלחה