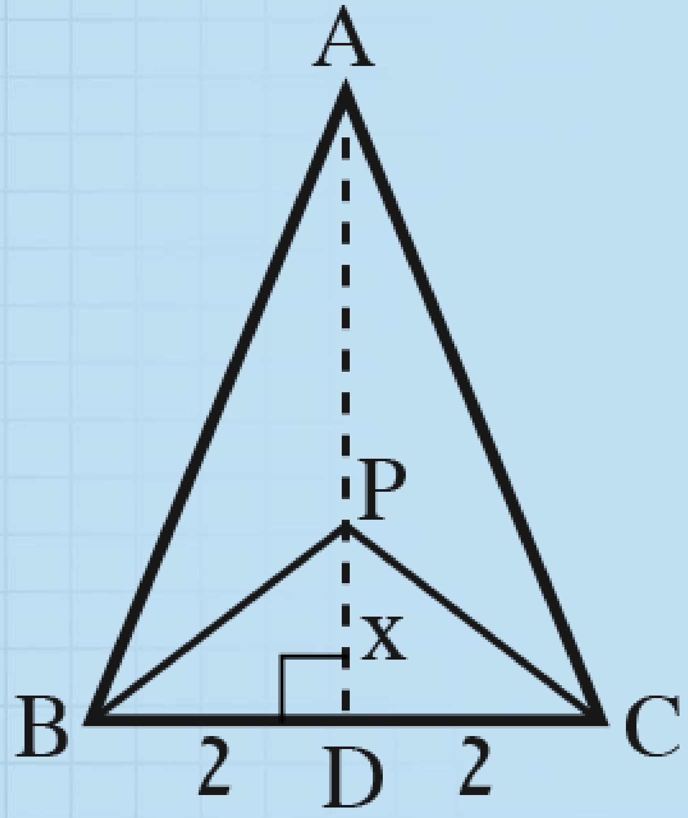
פתרון תרגיל

בעיות קיצון
בהנדסת המישור

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 196, ת. 33

השאלה



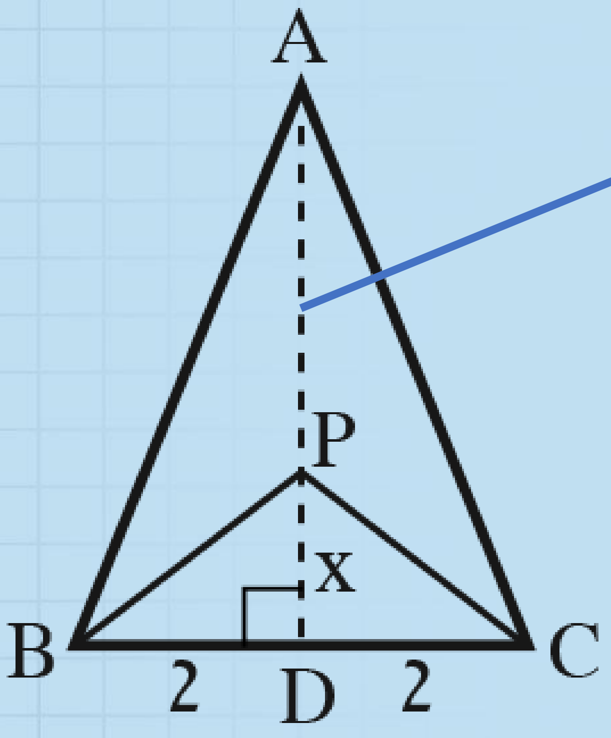
33) במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$
הגובה לבסיס BC הוא AD. נתון: $BC =$ 4 ס"מ,
$AD =$ 6 ס"מ, P היא נקודה על הגובה AD.
נסמן $DP = x$.

מה צריך להיות x כדי שהסכום $AP + BP + CP$
של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה
מינימלי?

מה צריך להיות x כדי שהסכום AP + BP + CP של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי?

$0 \le x \le 6$

פתרון



$AP = 6 - x$

נמצא את PC בעזרת משפט פיתגורס במשולש DPC:

$$DP^2 + DC^2 = PC^2$$

$$x^2 + 2^2 = PC^2$$

$$x^2 + 4 = PC^2$$

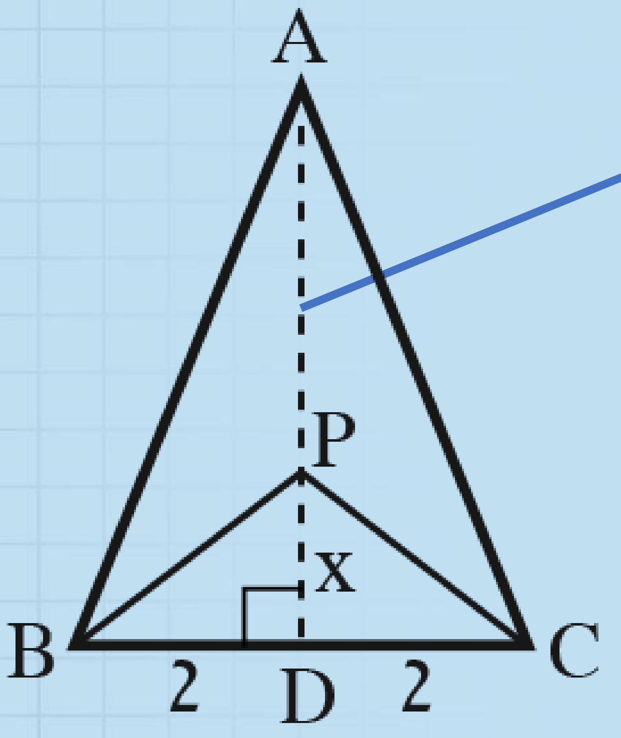
$$PC = \sqrt{x^2 + 4}$$

משולש BPC שווה שוקיים ולכן גם $BP = \sqrt{x^2 + 4}$

מה צריך להיות x כדי שהסכום AP + BP + CP של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי?

$0 \le x \le 6$

פתרון



$AP = 6 - x$

$BP = \sqrt{x^2 + 4}$

$CP = \sqrt{x^2 + 4}$

נקרא לפונקציית הסכום של AP, BP ו- CP: $f(x)$

$$f(x) = 6 - x + 2\sqrt{x^2 + 4}$$

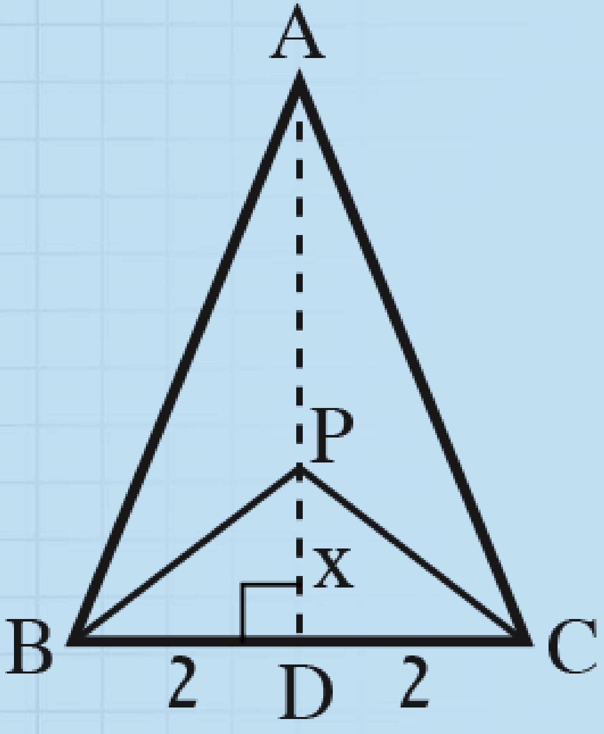
נמצא לפונקציה $f(x)$ ערך מינימלי על ידי השוואת נגזרתה לאפס:

$$f'(x) = -1 + \cancel{2} \cdot \frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 4}} = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

מה צריך להיות x כדי שהסכום AP + BP + CP של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי?

פתרון

$$0 \le x \le 6$$



$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = 0$$

$$-1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = 1 /(\quad)^2$$

$$\frac{4x^2}{x^2+4} = 1 \; /\cdot\, x^2+4$$

$$4x^2 = x^2 + 4$$

$$3x^2 = 4$$

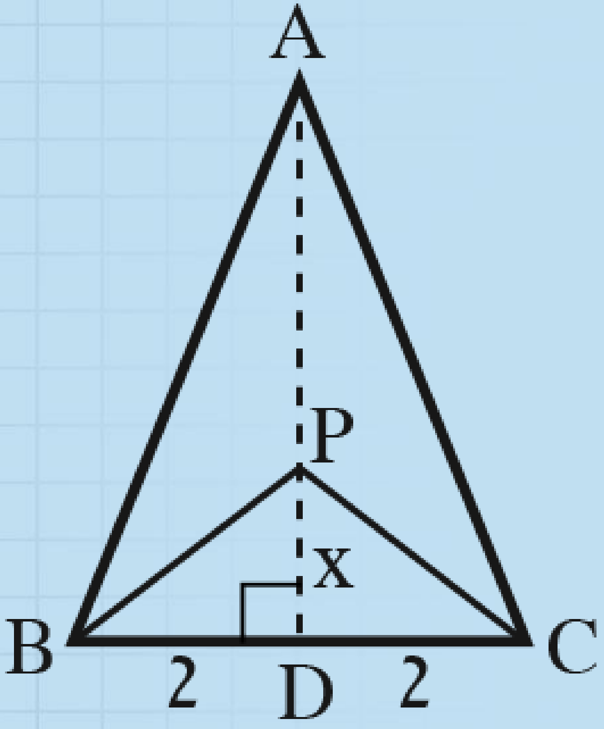
$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

מה צריך להיות x כדי שהסכום AP + BP + CP של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי?

$0 \le x \le 6$

פתרון



$$f(x) = 6 - x + 2\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$f(0) = 6 - 0 + 2\sqrt{0^2 + 4} = 10$$

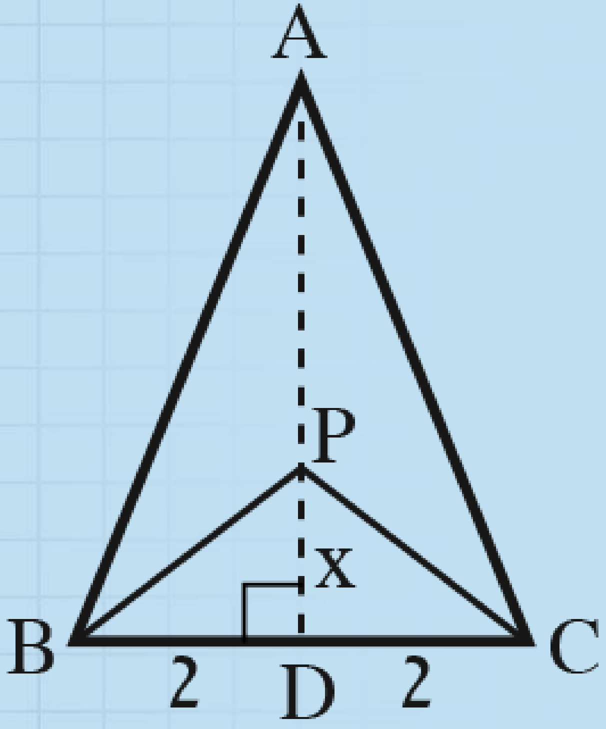
$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4} = 9.46$$

$$f(6) = 6 - 6 + 2\sqrt{6^2 + 4} = 12.65$$

מה צריך להיות x כדי שהסכום AP + BP + CP של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי?

$0 \le x \le 6$

פתרון



$$f(x) = 6 - x + 2\sqrt{x^2 + 4}$$

סכום של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי כאשר $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

בהצלחה