תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון בהנדסת המישור

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 189–190, דוגמה ב'

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

תרגיל לדוגמה

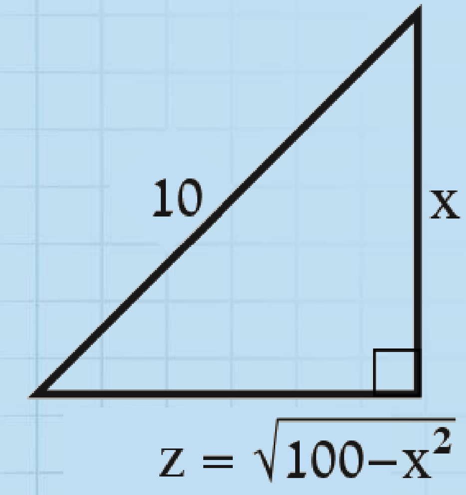
בעיות קיצון בהנדסת המישור (משולשים ומרובעים) – פונקציות עם שורשים

נביא דוגמא לבעיית קיצון שכדי לפתור אותה צריך לגזור פונקציה עם שורש.

דוגמא ב':

מבין כל המשולשים ישרי זווית שהיתר שלהם 10 ס"מ מצא את ניצביו של המשולש בעל השטח המקסימלי.

פתרון:



המשתנים הם ניצבי המשולש, הקבוע הוא אורך היתר – 10 ס"מ.

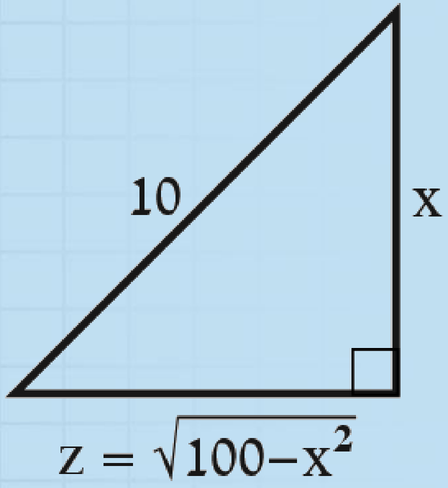
נסמן ניצב אחד ב-x ואת השני ב-z. לפי **משפט פיתגורס** מתקיים

$x^2+z^2 = 10^2$ לכן $z = \sqrt{100-x^2}$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

מבין כל המשולשים ישרי זווית שהיתר שלהם 10 ס"מ מצא את ניצביו של המשולש בעל השטח המקסימלי.



שטח המשולש, שנסמנו ב-y, הוא $y = \frac{x \cdot z}{2} = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$

נגזור את הפונקציה y ונשווה לאפס.

נקבל $y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100-x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}\right) = 0$

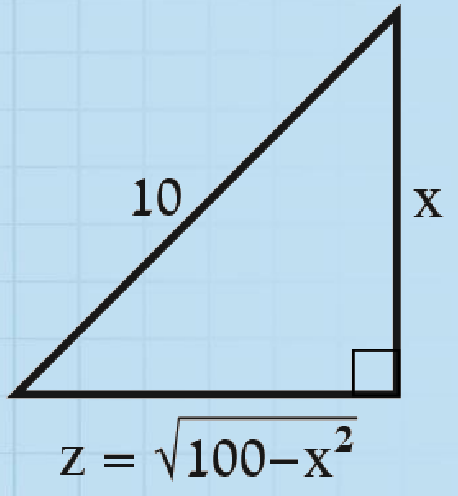
נצמצם ב-2 את הביטוי הימני ונכפול את כל המשוואה פי $2\sqrt{100-x^2}$

נקבל: $100-x^2-x^2 = 0$. כלומר $2x^2 = 100$ ולכן $x^2 = 50$ $x = \pm\sqrt{50}$

תרגיל לדוגמה

הפתרון המתאים הוא $x = \sqrt{50} = 7.07$ ס"מ.

אפשר להראות שמתקבל מקסימום ע"י הצבת $x = \sqrt{50}$
בנגזרת המונה של הנגזרת הראשונה.



דרך נוספת היא ע"י **הצבת** שני ערכים, משני הצדדים של $x = \sqrt{50}$,
במונה של הנגזרת הראשונה שהוא $100-2x^2$.

אם נציב $x = 7$ נקבל שהמונה הוא חיובי
ואם נציב $x = 8$ נקבל שהמונה הוא שלילי.

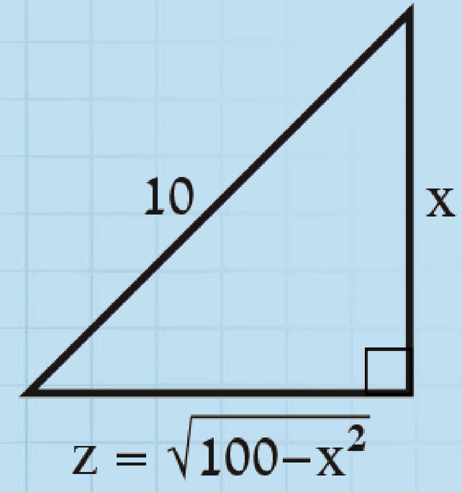
היות והמכנה של הנגזרת הוא חיובי נקבל שהפונקציה עולה
בסביבה משמאל ל- $x = \sqrt{50}$ והיא יורדת בסביבה מימין ל- $x = \sqrt{50}$,
ב- $x = \sqrt{50}$ מתקבל מקסימום.

תרגיל לדוגמה

נחשב עכשיו את הניצב השני z ונקבל: $z = \sqrt{100-x^2} = \sqrt{100-50} = \sqrt{50} =$ 7.07 ס"מ.

כלומר הניצבים שווים זה לזה.

מסקנה – כאשר המשולש **ישר הזווית** הוא גם **שווה שוקיים** אז הוא בעל **שטח מקסימלי.**



תרגיל לדוגמה

הערה:

בבעיות מינימום ומקסימום שבהן יש פונקציה עם שורש ריבועי ניתן בהרבה מקרים להעלות בריבוע את הפונקציה וכך להימנע מגזירה של פונקציה עם שורש. למעשה הגזירה היא של פולינום בלבד. הסיבה היא שבבעיות כאלה נקודת הקיצון של הפונקציה בריבוע היא כמו של הפונקציה המקורית. נדגים זאת לגבי הדוגמא האחרונה.

הפונקציה לפני הגזירה היתה $y = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$.

היות ומשווים את הנגזרת לאפס אז ניתן **להתעלם מהחילוק ב-2**

וכמו כן **להעלות בריבוע**. נסמן את התוצאה ב-$f(x)$,

כלומר $f(x) = x^2(100-x^2) = 100x^2-x^4$. נגזור ונשווה לאפס $f'(x) = 200x-4x^3 = 0$.

תרגיל לדוגמה

נפרק לגורמים, נקבל $x(200-4x^2) = 0$,

הפתרונות הם $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{50}$, $x_3 = -\sqrt{50}$.

הפתרון המתאים הוא 7.07 ס"מ $= \sqrt{50} = x$.

נגזרת שנייה היא $f''(x) = 200-12x^2$.

אם נציב $x = \sqrt{50}$, נקבל: $f''(\sqrt{50}) = 200-12\cdot50 = -400 < 0$,

כלומר מקסימום.

המשך הוא כמו בפתרון של הדוגמא.

בהצלחה