פתרון תרגיל
בעיות קיצון עם מספרים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 188, ת. 22

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

22) x ו-y הם שני מספרים המקיימים: $x-y^2=3$, $x\geq 3$, $y\geq 0$.

א. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה $\frac{y}{x}$ תהיה מקסימלית.

ב. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה הנ"ל תהיה מינימלית.

x ו-y הם שני מספרים המקיימים: $x-y^2=3$, $x \geq 3$, $y \geq 0$.

א. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה $\frac{y}{x}$ תהיה מקסימלית.

פתרון

$$\boldsymbol{x - y^2 = 3}$$

$$x - 3 = y^2$$

$$y_1 = \sqrt{x-3} \qquad \cancel{y_2 = -\sqrt{x-3}}$$

נסמן את המנה ב- f(x):

$$f(x) = \frac{y}{x} \longrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x}$$

x ו-y הם שני מספרים המקיימים: $x-y^2=3$, $x \ge 3$, $y \ge 0$.

א. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה $\frac{y}{x}$ תהיה מקסימלית.

פתרון

כדי למצוא מנה מקסימלית, נגזור את המנה ונשווה לאפס:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$$

$2\sqrt{x-3}/\cdot$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot x-\sqrt{x-3}\cdot 1}{x^2}=\frac{\frac{x}{2\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{x-2(x-3)}{2\sqrt{x-3}}}{x^2}=\frac{x-2x+6}{2\sqrt{x-3}\cdot x^2}=\frac{-x+6}{2x^2\sqrt{x-3}}$$

x ו-y הם שני מספרים המקיימים: $x-y^2=3$, $x \ge 3$, $y \ge 0$.

א. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה $\frac{y}{x}$ תהיה מקסימלית.

פתרון

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x}$$

$$f'(x)' = \frac{-x + 6\cancel{4}}{2x^2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x)' = 0$$

$$\frac{-x + \cancel{4}}{2x^2\sqrt{x-3}} = 0$$

$$-x + 6 = 0 \ /{+x}$$

$$x = 6$$

$$x - y^2 = 3$$

$$6 - y^2 = 3$$

$$y^2 = 3$$

$$y_1 = \sqrt{3} \qquad \cancel{y_2 = -\sqrt{3}}$$

x ו-y הם שני מספרים המקיימים: $x-y^2=3$, $x \geq 3$, $y \geq 0$.

א. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה $\frac{y}{x}$ תהיה מקסימלית.

פתרון

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$$

$$f'(x)=\frac{-x+6}{2x^2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(5)=0.01>0$$

$$f'(7)=-0.005<0$$

$y=\sqrt{3}$ $x=6$

$\downarrow$

כאשר $x=6$ המנה מקסימלית

x ו-y הם שני מספרים המקיימים: $x-y^2=3$, $x \ge 3$, $y \ge 0$.
ב. מצא מה צריכים להיות x ו-y כדי שהמנה הנ"ל תהיה מינימלית.

פתרון

נבדוק מה קורה בקצה התחום, כלומר כאשר $x=3$:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$$

המנה הנתונה תמיד חיובית בתחום ההגדרה הנתון.

$$f'(3)=\frac{\sqrt{3-3}}{3}=0$$

לכן, כאשר המנה תהיה שווה ל-0 היא תהיה בערך המינימלי שלה.

וזה אכן קורה כאשר $x=3$ ואז לפי חישוב פשוט במשוואה המקורית $y=0$

$$x-y^2=3$$

בהצלחה