פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –

פונקציה עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 112, ת. 26

השאלה

26) הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a}}$.

א. מצא את a ואת האסימפטוטה האנכית השנייה של הפונקציה.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. מצא את a ואת האסימפטוטה האנכית השנייה של הפונקציה.

פתרון

הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a}}$$

$\text{מכנה}(1) = 0$

$$\sqrt{1^2 - a} = 0$$

$$\sqrt{1 - a} = 0$$

$$\boldsymbol{a = 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$x^2 - 1 = 0$$

האסימפטוטות האנכיות הן:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$$

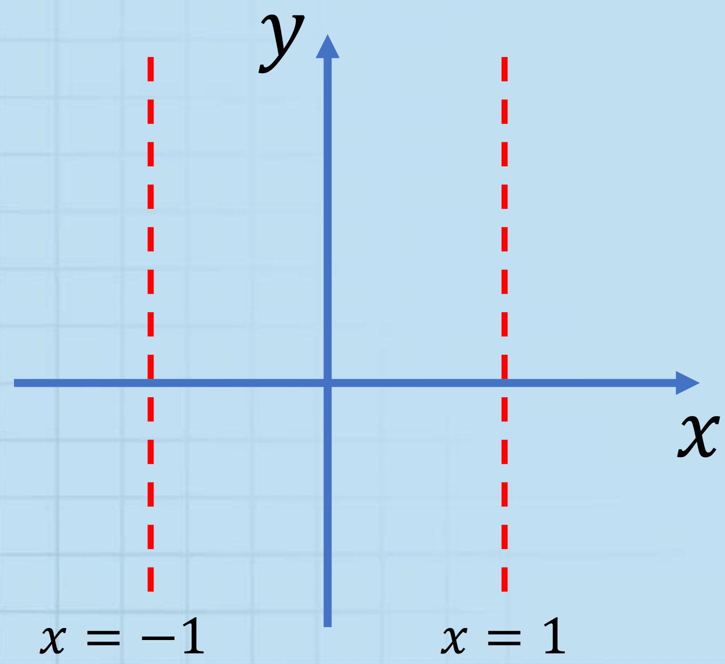
א. מצא את a ואת האסימפטוטה האנכית השנייה של הפונקציה.

פתרון

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a}}$$

האסימפטוטות האנכיות הן:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$$

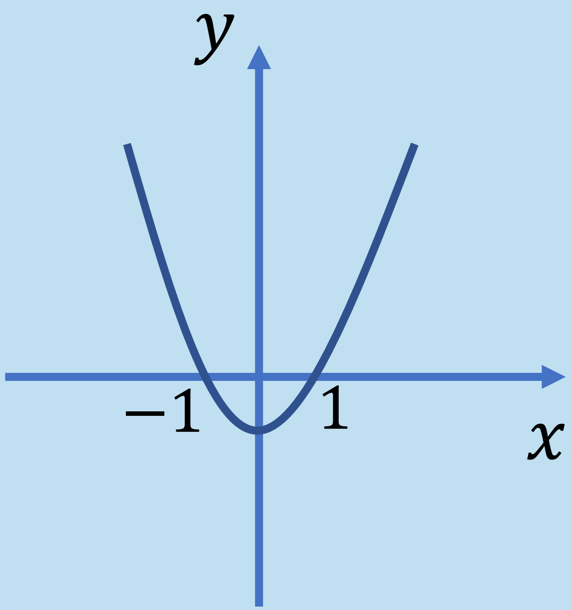


ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

תחום ההגדרה: $x^2 - 1 > 0$



$x > 1$ **או** $x < -1$

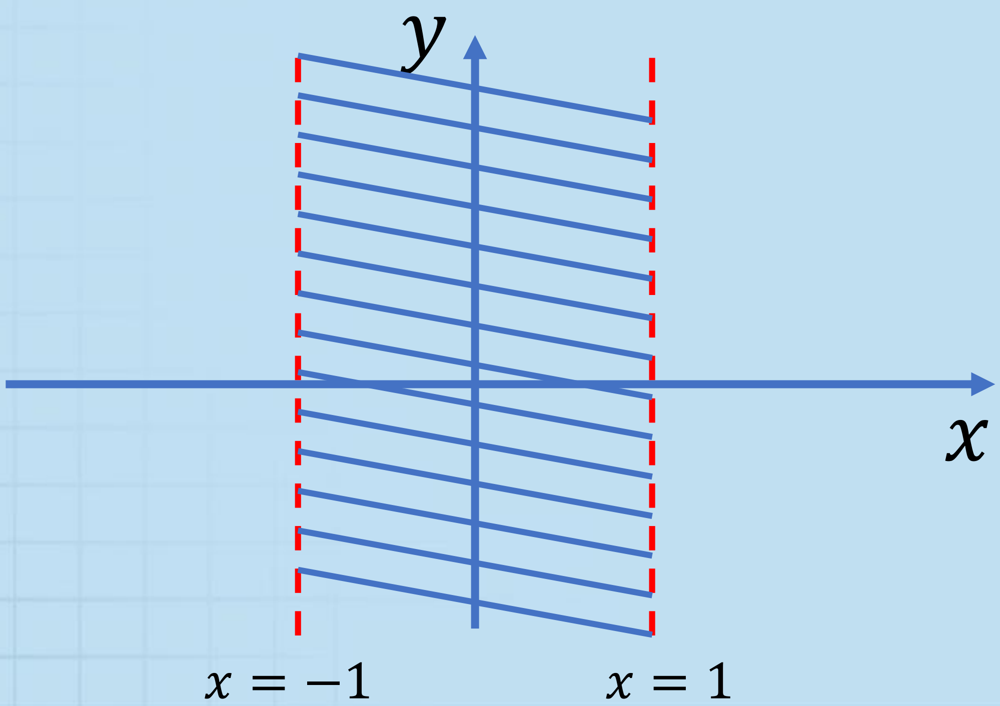
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a}}$$

תחום ההגדרה:

$x>1$ $\qquad$ $x<-1$



ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$x > 1$$
$$x < -1$$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-1} - x^2 \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{2x\sqrt{x^2-1} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$= \frac{\frac{2x(x^2-1)-x^3}{\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)} = \frac{2x^3-2x-x^3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$\boldsymbol{x > 1}$$

$$\boldsymbol{x < -1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

$$\cancel{x_1 = 0} \qquad x_2 = \sqrt{2} \qquad x_3 = -\sqrt{2}$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$\boldsymbol{x > 1}$$

$$\boldsymbol{x < -1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$x = \sqrt{2} \qquad f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{\sqrt{2}^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{2-1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\left(\sqrt{2}, 2\right)$$

$$x = -\sqrt{2} \qquad f\left(-\sqrt{2}\right) = 2$$

[הפונקציה הנתונה היא פונקציה זוגית]

$$\left(-\sqrt{2}, 2\right)$$

ג.   מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\boldsymbol{x>1}$ נקודות חשודות לקיצון:

$\boldsymbol{x<-1}$ $(\sqrt{2},2)$ $(-\sqrt{2},2)$

$$f'(x)=\frac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

מכנה הנגזרת חיובי בכל תחום
ההגדרה של הפונקציה

נגזרת(מונה) $=3x^2-2$

$x=\sqrt{2}$ נגזרת(מונה) $=3\sqrt{2}^2-2=4>0$ ⟶ מינימום $(\sqrt{2},2)$

$x=-\sqrt{2}$ נגזרת(מונה) $=3(-\sqrt{2})^2-2=4>0$ ⟶ מינימום $(-\sqrt{2},2)$

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

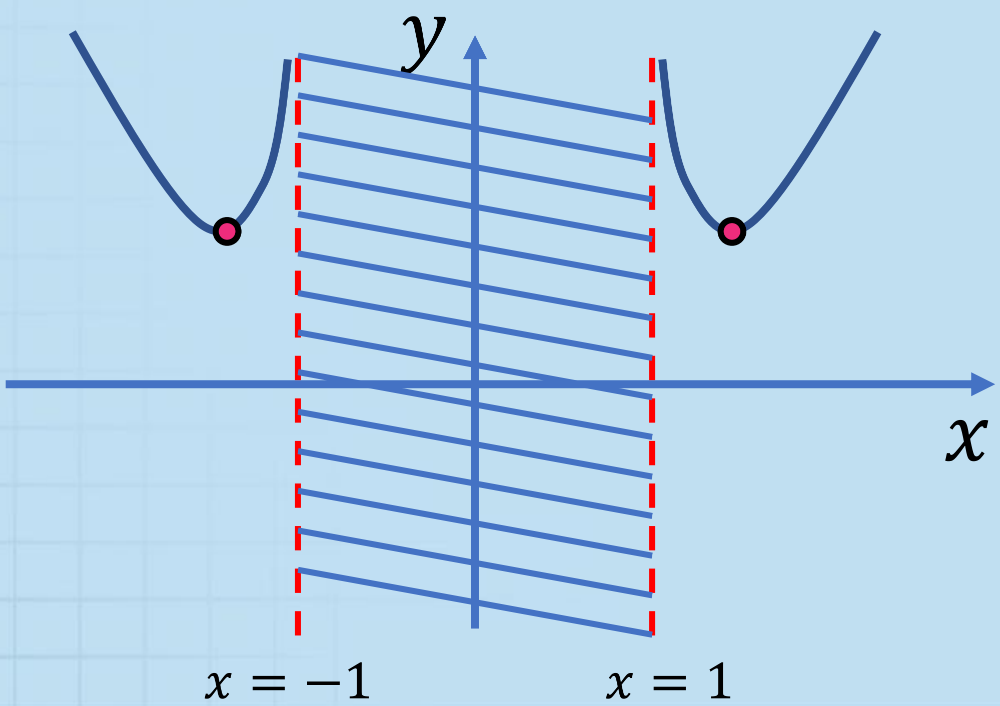
פתרון

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a}}$$

נקודות קיצון:

מינימום $(\sqrt{2}, 2)$

מינימום $(-\sqrt{2}, 2)$



בהצלחה