פתרון תרגיל

עלייה וירידה –

פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 103, ת. 26

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

השאלה

26) נתונה הפונקציה $y=\frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a>0$.

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. נתון שהמרחק בין שתי נקודות החיתוך הנ"ל הוא $\sqrt{12}$. מצא את a.

ג. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ו. הוכח על סמך התוצאות של סעיפים ג' ו-ד' שלכל x מתקיים אי השוויון $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}\le 2$.

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$. א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

פתרון

$x = 0$

$$y = \frac{0+a}{\sqrt{0^2+3}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\mathbf{0}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$y = 0$

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}} = 0$$

$$x = -a$$

$$(-a, \mathbf{0})$$

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$. ב. נתון שהמרחק בין שתי נקודות החיתוך הנ"ל הוא $\sqrt{12}$. מצא את a.

פתרון

$(-a, 0)$

$(0, \frac{a}{\sqrt{3}})$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{(0 + a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - 0\right)^2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}}$$

נתונה הפונקציה $y=\frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a>0$. ב. נתון שהמרחק בין שתי נקודות החיתוך הנ״ל הוא $\sqrt{12}$. מצא את a.

פתרון

$$(-a\,,0)$$

$$\left(0\,,\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\sqrt{12}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{3}} \longrightarrow \sqrt{3^2+\frac{3^2}{3}}=\sqrt{12}\ \checkmark$$

$$12=1\frac{1}{3}a^2\ /:1\frac{1}{3}$$

$$a^2=9 \longrightarrow a_1=3 \qquad \cancel{a_2=-3}$$

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$. ג. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

$$x^2 + 3 > 0$$

אי-שיוויון זה נכון לכל x

תחום ההגדרה: הפונקציה מוגדרת לכל x

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$. ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$\sqrt{x^2+3}\,/\cdot$

$$y' = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+3} - (x+3)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}}}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+3} - \frac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{(x^2+3)}$$

$$= \frac{\frac{x^2+3-x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{(x^2+3)} = \frac{\frac{x^2+3-x^2-3x}{\sqrt{x^2+3}}}{(x^2+3)} = \frac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

נתונה הפונקציה $y=\frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a>0$. ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$y' = \frac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

$$y' = 0$$

$$3-3x = 0 \quad /+3x$$

$$3 = 3x /:3$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{1+3}{\sqrt{1+3}} = \frac{4}{\sqrt{4}}$$

$$y = 2$$

$$(\mathbf{1}\,,\mathbf{2})$$

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$. ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$y' = \frac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

x	0	1	2
y'	+	0	–
y	↗		↘

(1 ,2) מקסימום

מכיוון שמכנה הנגזרת תמיד חיובי,
ניתן להציב את x רק במונה לשם קביעת סימן הנגזרת.

$$x = 0 \qquad 3 - 3 \cdot 0 = 3 > 0$$

$$x = 2 \qquad 3 - 3 \cdot 2 = -3 < 0$$

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$.   ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

$$y' = \frac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

x	0	1	2
y'	+	0	−
y	↗		↘

תחום עלייה:

$x < 1$

תחום ירידה:

$1 < x$

נתונה הפונקציה $y = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+3}}$, $a > 0$.

ו. הוכח על סמך התוצאות של סעיפים ג' ו-ד' שלכל x מתקיים אי השוויון $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}} \le 2$.

פתרון

$$y' = \frac{3-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

לפונקציה יש נקודת מקסימום בנקודה (1,2)

⬇

הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 2

⬇

ביטוי הפונקציה תמיד יהיה קטן או שווה ל-2

בהצלחה