הקנייה

עלייה וירידה –
פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 100–101

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

הקנייה

כמו במקרה של פונקציה רציונאלית (ראה עמ׳ 35) גם במקרה של פונקציה עם שורש אין בעיה למצוא עלייה וירידה **בנקודה בודדת**. לעומת זאת, במקרה של מציאת **תחומי עלייה וירידה** יש לשים לב **לתחום ההגדרה**.

דוגמא א׳:

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$.

פתרון:

נמצא תחילה את נקודות הקיצון ע״י שנגזור את הפונקציה ונשווה לאפס. נקבל:

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0$. לכן $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, כלומר $\sqrt{x} = 2$ והפתרון $x = 4$.

הקנייה

נמצא נגזרת שנייה: $f''(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

אם נציב $x = 4$ נקבל $f''(4) = -\frac{1}{16} < 0$ כלומר ב-$x = 4$ יש לפונקציה מקסימום.

הקנייה

עכשיו נשים לב **לתחום ההגדרה.**

היות והפונקציה מוגדרת עבור $x \geq 0$ נקבל

שהיא עולה משמאל לנקודת המקסימום, כלומר בתחום $0 < x < 4$,

ויורדת מימין לנקודת המקסימום, כלומר בתחום $x > 4$.

הערה:

אפשר למצוא את תחומי העלייה והירידה גם ע"י פתרון **אי שוויון אי רציונאלי.**

הפונקציה עולה בתחום שבו $f'(x) > 0$.

לכן צריך לפתור את אי השוויון $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, כלומר $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{x}}$.

הקנייה

הערה:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

שני אגפי אי השוויון הם **חיוביים**

ולכן ניתן לכפול את אי השוויון במכנה המשותף שהוא $2\sqrt{x}$.

נקבל $\sqrt{x} > 2$. ע"י העלאה בריבוע נקבל $4 < x$.

בהתחשב בתחום ההגדרה נקבל את התחומים שקיבלנו קודם.

הקנייה

דוגמא ב׳:

הוכח שהפונקציה $f(x) = \sqrt{x^3-8}$ עולה בכל תחום הגדרתה

פתרון:

הפונקציה מוגדרת כאשר $x^3-8 \ge 0$, כלומר $x^3 \ge 8$.

ע״י הוצאת שורש שלישי משני אגפי אי השוויון נקבל שתחום ההגדרה הוא $x \ge 2$.

אם נגזור את הפונקציה נקבל: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3-8}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}$.

נשים לב שגם המונה $3x^2$ וגם המכנה $2\sqrt{x^3-8}$ שניהם **חיוביים** עבור $x > 2$.

כלומר $f'(x) > 0$ עבור $x > 2$.

מסקנה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

בהצלחה