פתרון תרגיל

נקודות קיצון פנימיות – פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 99, ת. 38

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

38) נתונה הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3a^2}$ $(a > 0)$.

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבע את סוגה.

ב. נתון שנקודת הקיצון היא הקודקוד של הפרבולה $y = x^2-2x+b$.

(1) מצא את a. (2) מצא את b.

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3a^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2 + 3a^2) - \sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2 + 3a^2)^2}$$

$2\sqrt{x}\cdot/$

$$y' = \frac{\frac{x^2 + 3a^2}{2\sqrt{x}} - 2x\sqrt{x}}{(x^2 + 3a^2)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x^2 + 3a^2 - 4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 3a^2)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{3a^2 - 3x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 3a^2)^2}$$

$$y' = \frac{3a^2 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 3a^2)^2}$$

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3a^2}$$

$$y' = \frac{3a^2 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 3a^2)^2}$$

$$y' = 0$$

$$3a^2 - 3x^2 = 0$$

$$a^2 - x^2 = 0$$

$$(a - x)(a + x) = 0$$

$$x_1 = a \qquad \cancel{x_1 = -a}$$

$$y' = \frac{3a^2 - 3a^2}{2\sqrt{a}(a^2 + 3a^2)^2}$$

$$y' = 0 \ \checkmark$$

$$y = \frac{\sqrt{a}}{a^2 + 3a^2} = \frac{\sqrt{a}}{4a^2}$$

$$\left(a\,, \frac{\sqrt{a}}{4a^2}\right)$$

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$

$$y'' (\text{מונה}) = -6x$$

$$a > 0$$

$$y'' (\text{מונה}) < 0$$

$\Downarrow$

מקסימום $\left(a , \frac{\sqrt{a}}{4a^2}\right)$

$$y' = \frac{3a^2 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 3a^2)^2}$$

סימן מכנה הנגזרת תמיד חיובי

ב. נתון שנקודת הקיצון היא הקודקוד של הפרבולה $y = x^2-2x+b$.

(1) מצא את a. (2) מצא את b.

פתרון

תחום ההגדרה: $x \geq 0$

$$y = x^2 - 2x + b$$

$$x_k = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3a^2}$$

$$y' = \frac{3a^2 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 3a^2)^2}$$

מקסימום $(a\,,\frac{\sqrt{a}}{4a^2})$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{a = 1}$

$$(1\,,\frac{\sqrt{1}}{1^2 + 3 \cdot 1^2}) \rightarrow (1\,,\frac{1}{4})$$

ב. נתון שנקודת הקיצון היא הקודקוד של הפרבולה $y = x^2 - 2x + b$.

(1) מצא את a. (2) מצא את b.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$

$$y = x^2 - 2x + b$$

$$(1, \frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{4} = 1^2 - 2 \cdot 1 + b$$

$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + b \quad /+1$$

$$1.25 = b$$

בהצלחה