הקנייה

נקודות קיצון פנימיות – פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 95–96

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

הקנייה

בהרבה מקרים תחום ההגדרה של פונקציה עם שורש ריבועי הוא קטע סגור או חצי סגור או קרן. במקרה כזה יש לפונקציה נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה. למרות זאת, בסעיף זה נמצא רק את **נקודות הקיצון הפנימיות** שבתוך תחום ההגדרה ונעשה זאת בעזרת הנגזרת. בהמשך נמצא גם את נקודות הקיצון שבקצה תחום ההגדרה.

דוגמא א':

מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $y = 2\sqrt{x} - x$.

פתרון:

נגזור ונשווה לאפס. נקבל $y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0$. נעביר את -1 לאגף ימין

ונקבל $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$. נכפול פי $\sqrt{x}$ ונקבל $1 = \sqrt{x}$. נעלה בריבוע ונקבל $x = 1$.

הקנייה

נגזור פעם שנייה ונקבל $y'' = -\frac{1}{(\sqrt{x}\,)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

אם נציב $x = 1$ נקבל $y'' < 0$, כלומר הנקודה היא נקודת מקסימום.
לגבי y נקבל $y = 2\sqrt{1} - 1 = 2 - 1 = 1$.

לסיכום: נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $y = 2\sqrt{x} - x$ היא הנקודה $(1\,,1)$ שבה יש לפונקציה מקסימום.

הקנייה

דוגמא ב׳:

מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2-6x+10}$.

פתרון:

נגזור ונשווה לאפס: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+10}} \cdot (2x-6) = 0$.

כלומר קיבלנו $\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}} = 0$, לכן $2x-6 = 0$ ומכאן $x = 3$.

כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון **נציב בפונקציה** את הערכים הבאים:

$x = 2$, $x = 3$, $x = 4$. נקבל: $f(2) = \sqrt{2}$, $f(3) = 1$, $f(4) = \sqrt{2}$.

מסקנה: בנקודה $(3,1)$ יש לפונקציה מינימום.

הקנייה

הערות:

א) כדי לקבוע את הסוג של נקודת הקיצון בדוגמא האחרונה ניתן להיעזר בכלל שהבאנו בעמ׳ 31. המונה של הנגזרת הראשונה הוא $2x-6$ והנגזרת שלו היא 2. כלומר **נגזרת המונה** של הנגזרת הראשונה היא **חיובית** ולכן לפונקציה יש **מינימום** בנקודה $x = 3$.

ב) **דרך נוספת** לקביעת סוג הקיצון היא ע״י **הצבה בנגזרת.** היות והמכנה של הנגזרת הוא חיובי אז מספיק להציב במונה של הנגזרת. אם נציב $x = 2$ נקבל $2 \cdot 2 - 6 = -2$, אם נציב $x = 4$ נקבל $2 \cdot 4 - 6 = 2$. כלומר, משמאל ל-$x = 3$ הפונקציה יורדת ומימין ל-$x = 3$ הפונקציה עולה ולכן המסקנה היא שב-$x = 3$ יש לפונקציה מינימום.

בהצלחה