פתרון תרגיל

נקודות קיצון מוחלטות – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 66, ת. 8

השאלה

8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $-10 \le x \le -1$ והוכח שהיא אי שלילית בתחום זה.

ג. האם יש לפונקציה בתחום הנ"ל נקודת מינימום מקומי שאיננה נקודת מינימום מוחלט? נמק.

ד. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

ה. הוכח: לכל $1 \le x \le 4$ מתקיים: $2 \le \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8} \le 2\frac{1}{2}$.

8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.
א. מצא את a.

פתרון

$$\boldsymbol{y'(-4) = 0}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{0 \cdot (x-8) - a \cdot 1}{(x-8)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{a}{(x-8)^2}$$

$$y'(-4) = -\frac{1}{(-4)^2} + \frac{a}{(-4-8)^2} = 0$$

8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

א. מצא את a.

פתרון

$$-\frac{1}{(-4)^2} + \frac{a}{(-4-8)^2} = 0$$

$$-\frac{1}{16} + \frac{a}{144} = 0 / + \frac{1}{16}$$

$$\frac{a}{144} = \frac{1}{16} \quad / \cdot 144$$

$$a = 9$$

8) לפונקציה $y=\frac{1}{x}-\frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x=-4$.

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $-10 \le x \le -1$ והוכח שהיא אי שלילית בתחום זה.

פתרון

$$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{9}{(x-8)^2}$$

$$y'=0$$

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{9}{(x-8)^2}=0 \quad /+\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{9}{(x-8)^2}=\frac{1}{x^2} \quad /\sqrt{\ }$$

$$\frac{3}{x-8}=\frac{1}{x}$$

$$3x=x-8$$

$$2x=-8$$

$$x=-4$$

$$\frac{3}{x-8}=-\frac{1}{x}$$

$$3x=-(x-8)$$

$$3x=-x+8$$

$$4x=8$$

$$\cancel{x=2}$$

$$y=\frac{1}{-4}-\frac{9}{-4-8}=-\frac{1}{4}+\frac{9}{12}=0.5$$

8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $-10 \le x \le -1$ והוכח שהיא אי שלילית בתחום זה.

פתרון

נקודת חשודה לקיצון $(-4, 0.5)$ נמצא את נקודות הקצה:

$$x = -1$$

$$y = \frac{1}{-1} - \frac{9}{-1-8}$$

$$= -1 + 1$$

$$y = 0$$

$$(-1, 0)$$

$$x = -10$$

$$y = \frac{1}{-10} - \frac{9}{-10-8}$$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{1}{2}$$

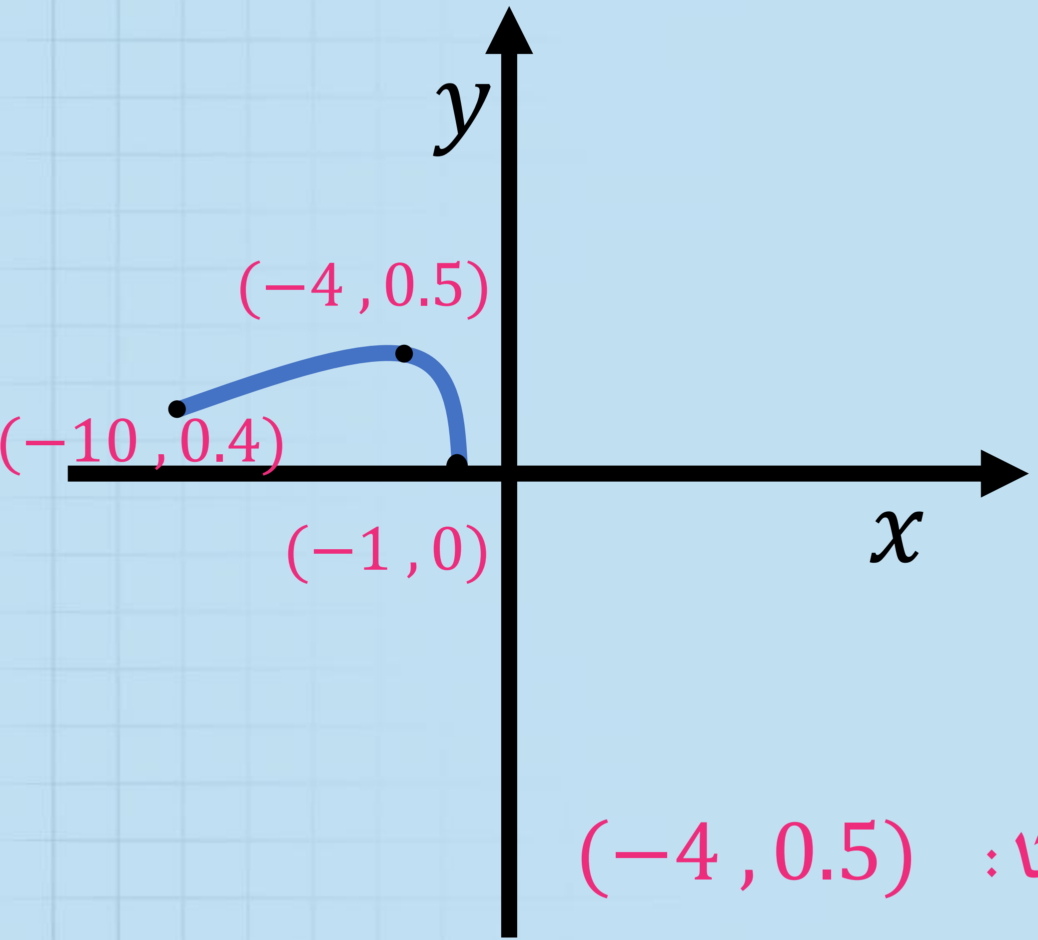
$$y = 0.4$$

$$(-10, 0.4)$$

8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום $-10 \le x \le -1$ והוכח שהיא אי שלילית בתחום זה.

פתרון



נקודה חשודה לקיצון $(-4, 0.5)$

נקודות הקצה: $(-1, 0)$ $(-10, 0.4)$

נקודת קיצון מוחלט:

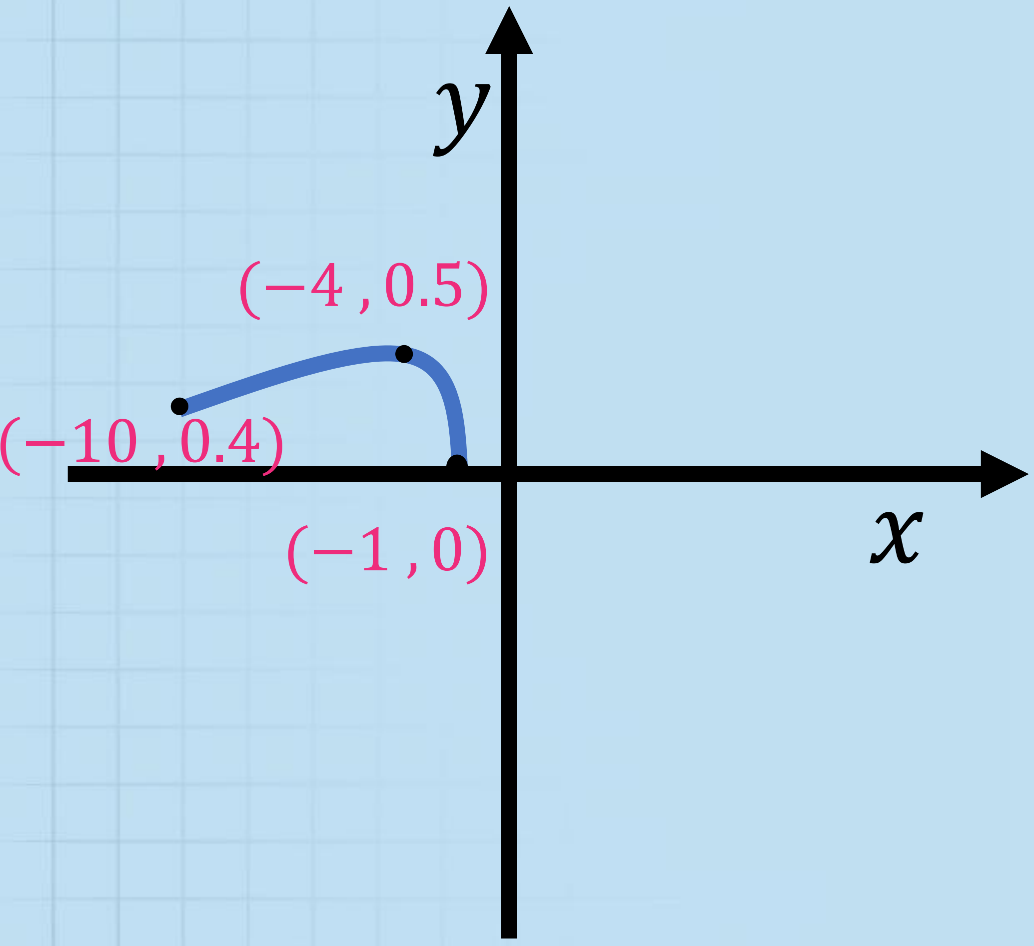
מינימום מוחלט: $(-1, 0)$ מקסימום מוחלט: $(-4, 0.5)$

הפונקציה אי שלילית בתחום הנתון מפני שהערך הכי קטן שלה הוא 0

8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

ג. האם יש לפונקציה בתחום הנ"ל נקודת מינימום מקומי שאיננה נקודת מינימום מוחלט? נמק.

פתרון



גם הנקודה $(-10\ ,0.4)$ שהיא נקודת קצה נחשבת לנקודת מינימום ולכן היא נקודת מינימום מקומית שאינה מוחלטת.

8) לפונקציה $y=\frac{1}{x}-\frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x=-4$.

ד. מצא בתחום $1\le x\le 4$ את המינימום של הפונקציה.

פתרון

נקודה חשודה לקיצון בנקודה $(2,2)$

$$\boldsymbol{x=4}$$

$$y=\frac{1}{4}-\frac{9}{4-8}=\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{y=2.5}$$

$(4,2.5)$

נמצא את נקודות הקצה:

$$\boldsymbol{x=1}$$

$$y=\frac{1}{1}-\frac{9}{1-8}=1+1\frac{2}{7}$$

$$\boldsymbol{y=2\frac{2}{7}} \qquad \boldsymbol{\left(1,2\frac{2}{7}\right)}$$

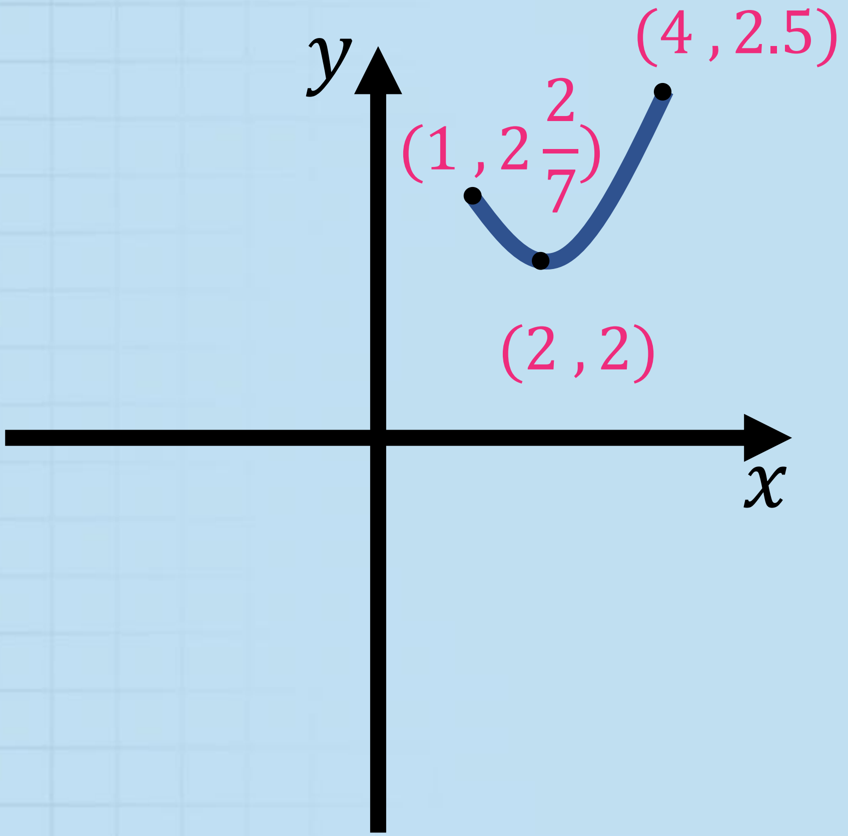
8) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

ד. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

פתרון

נקודת קיצון בנקודה $(2, 2)$

נקודות הקצה: $(4, 2.5)$ $(1, 2\frac{2}{7})$



<u>נקודת קיצון מוחלט:</u>

מינימום מוחלט: $(2, 2)$

מקסימום מוחלט: $(4, 2.5)$

הערך המינימלי של הפונקציה בתחום הנתון הוא 2 (ערך ה-y בנקודת המינימום המוחלט)

ה. הוכח: לכל $1 \le x \le 4$ מתקיים: $2\frac{1}{2} \ge \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8} \ge 2$.

פתרון

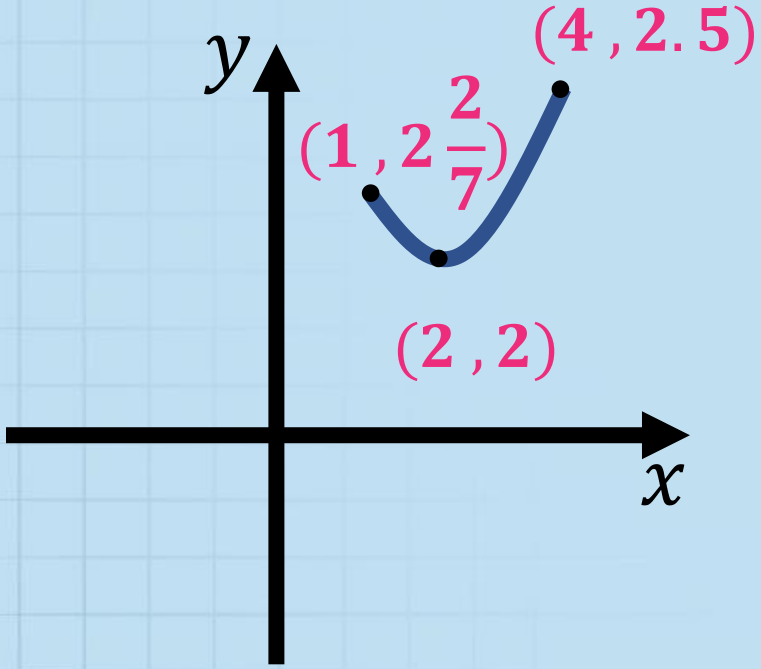
ניתן לראות לפי גרף הפונקציה שבתחום הנתון: $1 \le x \le 4$

הערך המינימאלי של הפונקציה הוא 2

והערך המקסימלי של הפונקציה הוא 2.5

ולכן הביטוי $\frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ שהוא הביטוי של הפונקציה

יהיה גם הוא בין 2 ל- 2.5 או שווה להם.



כלומר: $2 \le \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8} \le 2\frac{1}{2}$

בהצלחה