פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 55, ת. 39

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

חקירת פונקציה כאשר הגרף לא נתון — פונקציות רציונאליות

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

א) תחום הגדרה.
ב) נקודות קיצון.
ג) תחומי עלייה וירידה.
ד) נקודות חיתוך עם הצירים.
ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.
ו) שרטוט גרף הפונקציה.

(פונקציות עם אסימפטוטה אנכית אחת)

39) $$y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

א) תחום הגדרה.

פתרון

נבדוק עבור איזה ערך של x המכנה שווה לאפס

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 1$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}$$

$$y' = \frac{2(x-1)^3 - 2(x-1)\left(x^2-2x-3\right)}{(x-1)^4}$$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2(x-1)^3 - 2(x-1)\left(x^2 - 2x - 3\right)}{(x-1)^4}$$

$$y' = \frac{2(x-1)\left[(x-1)^2 - \left(x^2 - 2x - 3\right)\right]}{(x-1)^4}$$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2(x-1)\left[(x-1)^2 - \left(x^2 - 2x - 3\right)\right]}{(x-1)^4}$$

$$y' = \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^4} = \frac{8(x-1)}{(x-1)^4}$$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

$$y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$y'=\frac{8(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$y'=0$$

$$\frac{8(x-1)}{(x-1)^4}=0$$

$$8(x-1)=0$$

$$\cancel{x=1}$$

לכן אין נקודות קיצון אך $x=1$ ישפיע על תחומי העלייה והירידה

ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{8(x-1)}{(x-1)^4}$$

x	0	1	2
y'	−		+
y	↘		↗

מכיוון שמכנה הנגזרת תמיד חיובי,
ניתן להציב את x רק במונה לשם קביעת סימן הנגזרת.

$x = 0 \qquad 8(x-1) = 8(0-1) = -8 < 0$

$x = 2 \qquad 8(x-1) = 8(2-1) = 8 > 0$

ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{8(x-1)}{(x-1)^4}$$

x	0	1	2
y'	−		+
y	↘		↗

תחומי עלייה:

$1 < x$

תחומי ירידה:

$x < 1$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרון

$$y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$y=0$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x_1=-1 \qquad x_1=3$

$(-1\,,0) \qquad (3\,,0)$

$x=0$

$$y=\frac{0^2-2\cdot 0-3}{(0-1)^2}$$

$$y=\frac{-3}{1}$$

$y=-3$

$(0\,,-3)$

פתרון

$$y=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

<u>אסימפטוטה אנכית</u>:

מפני שעבור $x=1$ המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס,

הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה אנכית.

<u>אסימפטוטה אופקית</u>:

$$y=\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+1}$$

החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והמקדם הוא 1.

החזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 והמקדם הוא 1.

לכן **האסימפטוטה האופקית** היא $y=\frac{1}{1}$ כלומר, $y=1$

ו) שרטוט גרף הפונקציה.

פתרון

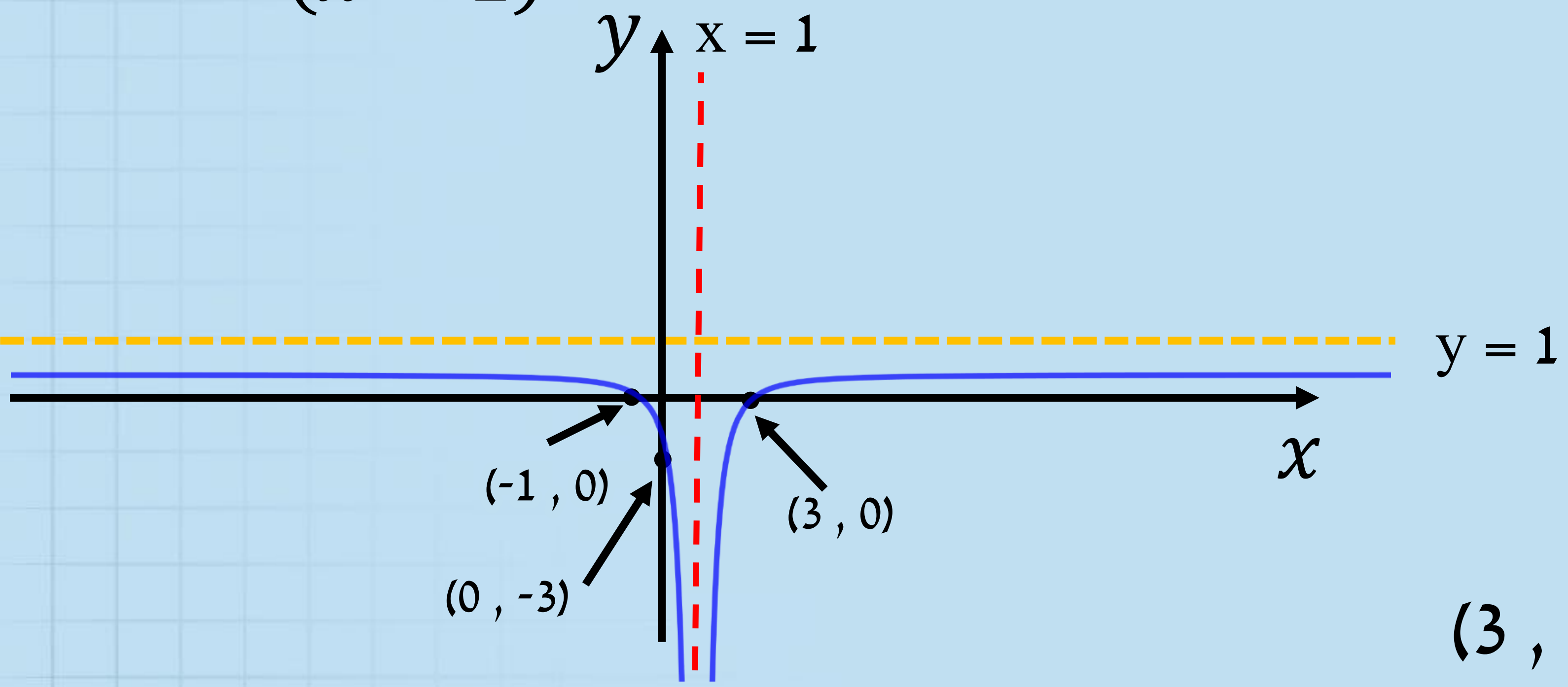
$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

א. תחום ההגדרה הוא $x \neq 1$.

ב. נקודת קיצון – אין.

ג. תחומי עלייה וירידה

x	0	1	2
y'	−		+
y	↘		↗



ד. נקודות חיתוך עם הצירים:

(-1 , 0) ו- (0 , -3) ו- (3 , 0)

ה. אסימפטוטה אנכית $x = 1$ ואסימפטוטה אופקית $y = 1$

בהצלחה