פתרון תרגיל

חקירת פונקציה– פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 55, ת. 25

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

א) תחום הגדרה.
ב) נקודות קיצון.
ג) תחומי עלייה וירידה.
ד) נקודות חיתוך עם הצירים.
ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.
ו) שרטוט גרף הפונקציה.

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה:

(פונקציות עם נקודת אי הגדרה שבה אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית)

25) $$y = \frac{x-2}{x^2-4}$$

א) תחום הגדרה.

פתרון

$$y = \frac{x-2}{x^2-4}$$

נבדוק עבור איזה ערך של x המכנה שווה לאפס

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

ולכן תחום ההגדרה הוא: $x \neq -2$ וגם $x \neq 2$

א) תחום הגדרה.

פתרון

נשים לב שניתן לפרק את המכנה לגורמים ובכך

$$y = \frac{x-2}{x^2-4}$$

לצמצם את השבר ולפשטו

$$y = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$y = \frac{1}{x+2}$$

נחקור את הפונקציה המפושטת אך נזכר כי

תחום ההגדרה עודנו $x \neq -2$ וגם $x \neq 2$

ב)   נקודות קיצון.

פתרון

$$y = \frac{1}{x+2}$$

$$y' = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0$$

$$\frac{-1}{(x+2)^2} = 0$$

פונקציית הנגזרת לעולם לא שווה לאפס
ולכן אין לפונקציה נקודות קיצון.

ב) נקודות קיצון.

פתרון

נביט בפונקציית הנגזרת שהיא מנה:

$$y = \frac{1}{x+2} \qquad y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

מונה הנגזרת הוא 1-, כלומר תמיד שלילי

מכנה הנגזרת הוא דו-איבר **בריבוע** $(x+2)^2$,
כלומר תמיד חיובי (למעט כאשר $x = -2$ - שם הפונקציה לא מוגדרת)

ערך הנגזרת תמיד תהיה מהצורה $\frac{(-)}{(+)}$ (למעט כאשר $x = -2$) כלומר שלילי.

הפונקציה תהיה במגמת ירידה בכל התחומים בהם היא מוגדרת

ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

$$y = \frac{1}{x+2}$$

$$y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

x		-2		2	
y'	—		—		—
y	↘		↘		↘

תחומי עלייה:

אין

תחומי ירידה:

$2 < x$ או $-2 < x < 2$ או $x < -2$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרון

$$y=\frac{1}{x+2}$$

$y=0$

$1=0$

אין פתרון

אין חיתוך עם ציר ה- x

$x=0$

$$y=\frac{1}{0+2}$$

$$y=\frac{1}{2}$$

$(0\,,0.5)$

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

פתרון

$$y = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$y = \frac{1}{x+2}$$

<u>אסימפטוטה אנכית</u>:

בנקודה שבה $x = 2$ יש "חור":

$$y(2) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$ חור$(2\,,0.25)$

בנוסף, $x = -2$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

<u>אסימפטוטה אופקית</u>:

מפני שהחזקה הגדולה יותר נמצאת במכנה,

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה היא $y = 0$

ו) שרטוט גרף הפונקציה.

פתרון

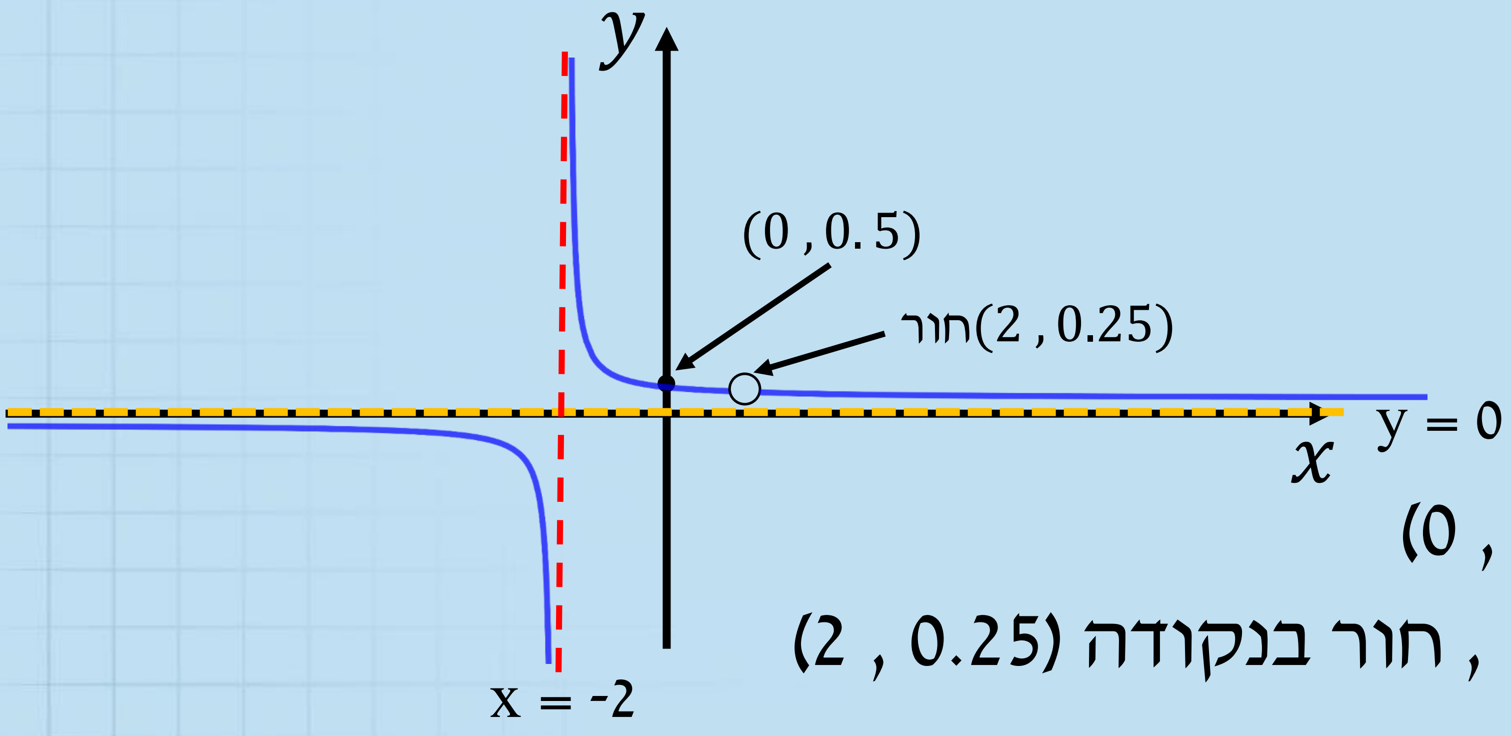
$$y = \frac{1}{x+2}$$

א. תחום ההגדרה הוא $x \neq 2$ וגם $x \neq -2$

ב. נקודת קיצון - אין

ג. תחומי עלייה וירידה

x		-2		2	
y'	–		–		–
y	↘		↘		↘



ד. נקודת חיתוך עם הצירים $(0\ ,\ 0.5)$

ה. אסימפטוטה אנכית $x = -2$, חור בנקודה $(2\ ,\ 0.25)$

ואסימפטוטה אופקית $y = 0$

בהצלחה