פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 55, ת. 19

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

השאלה

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

א) תחום הגדרה. **ב) נקודות קיצון.**

ג) תחומי עלייה וירידה. **ד) נקודות חיתוך עם הצירים.**

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים. **ו) שרטוט גרף הפונקציה.**

חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים שרשומים בתחילת סעיף זה:

(פונקציות עם שתי אסימפטוטות אנכיות)

19) $$y=\frac{1+3x}{x-x^2}$$

א) תחום הגדרה.

פתרון

$$y = \frac{1+3x}{x-x^2}$$

נבדוק עבור איזה ערך של x המכנה שווה לאפס

$$y = \frac{3x+1}{x(1-x)}$$

$$x(1-x) = 0$$

$x_1 = 0$ $x_2 = 1$

ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$ $x \neq 1$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

$$y = \frac{3x+1}{x-x^2}$$

$$y' = \frac{3(x-x^2) - (3x+1)\cdot(1-2x)}{(x-x^2)^2} = \frac{3x-3x^2-(3x-6x^2+1-2x)}{(x-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{3x-3x^2-3x+6x^2-1+2x}{(x-x^2)^2} = \frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}$$

ב)   נקודות קיצון.

פתרון

$$y=\frac{3x+1}{x-x^2}$$

$$y'=\frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}$$

$$y'=0$$

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}=0$$

$$3x^2+2x-1=0$$

$$x_1=\frac{1}{3} \qquad x_2=-1$$

$$y_1=\frac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \qquad y_2=\frac{3\cdot(-1)+1}{-1-(-1)^2}$$

$$y_1=9 \qquad y_2=1$$

$$\left(\frac{1}{3},9\right) \qquad (-1,1)$$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

$$y = \frac{3x+1}{x-x^2}$$

מינימום $\left(\frac{1}{3}, 9\right)$

מקסימום $(-1,1)$

		מקסימום				מינימום			
x		-1		0		$\frac{1}{3}$		1	
y	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$

$$y' = \frac{3x^2+2x-1}{(x-x^2)^2}$$

מכיוון שמכנה הנגזרת תמיד חיובי בתחום ההגדרה, נקבע סוג קיצון לפי סימן הנגזרת של המונה בנקודות החשודות

$(\text{מונה})\ \text{נגזרת} = 6x+2$

$x = -1$

$(\text{מונה})\ \text{נגזרת} = -4 < 0$

$x = \frac{1}{3}$

$(\text{מונה})\ \text{נגזרת} = 4 > 0$

ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

$$y=\frac{3x+1}{x-x^2}$$

x		-1		0		$\frac{1}{3}$		1	2
y	↗	0	↘		↘	0	↗		↗

תחומי עלייה:

$x > 1$ או $x < -1$

או $\frac{1}{3} < x < 1$

תחומי ירידה:

$-1 < x < 0$ או $0 < x < \frac{1}{3}$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרון

$$y = \frac{3x+1}{x-x^2}$$

$y = 0$

$3x + 1 = 0$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

$(-\frac{1}{3}, 0)$

$x = 0$

עבור $x = 0$ הפונקציה לא מוגדרת

ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

פתרון

$$y=\frac{3x+1}{x-x^2}$$

<u>אסימפטוטה אנכית</u>:

מפני שעבור $x=0$ ו- $x=1$ המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס,

הישרים $x=0$ ו- $x=1$ הם אסימפטוטות אנכיות.

<u>אסימפטוטה אופקית</u>:

החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x .

החזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 .

לכן **האסימפטוטה האופקית** היא $y=0$

ו) שרטוט גרף הפונקציה.

$$y = \frac{3x+1}{x-x^2}$$

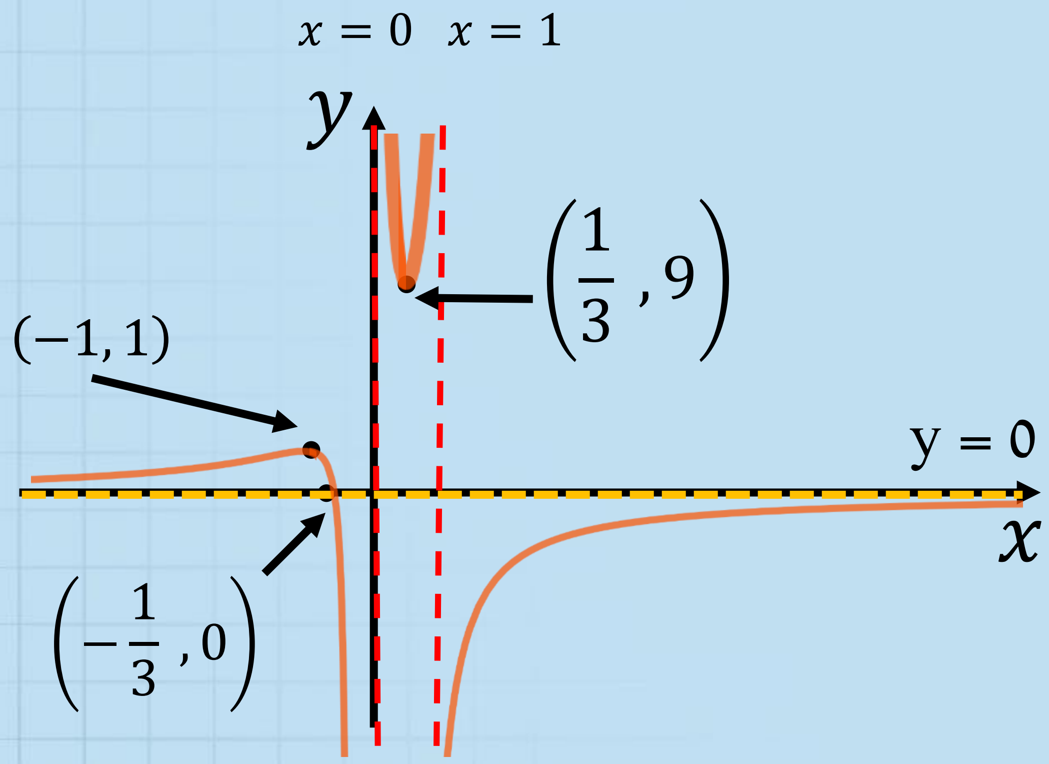
פתרון

א. תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$ ו- $x \neq 1$.

ב. נקודת קיצון $(-1,1)$מקסימום $\left(\frac{1}{3},9\right)$מינימום

ג. תחומי עלייה וירידה

x	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y'	+	0	−		−	0	+		+
y	↗		↘		↘		↗		↗



ד. נקודת חיתוך עם הצירים $\left(-\frac{1}{3},0\right)$

ה. אסימפטוטות אנכיות $x=0$ ו- $x=1$ ואסימפטוטה אופקית $y=0$

בהצלחה