תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 51–52, דוגמה ב'

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$ עפ"י הסעיפים של הדוגמא הקודמת.

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטט את גרף הפונקציה.

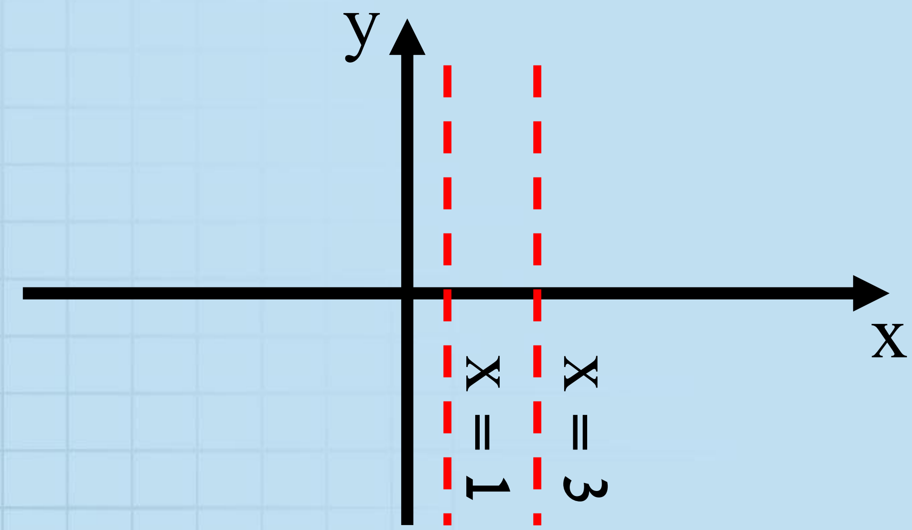
תרגיל לדוגמה

$$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

א. **תחום הגדרה** – כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה נשווה את המכנה לאפס.

נקבל $x^2-4x+3 = 0$. פתרונות המשוואה הריבועית הם: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

לכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 1$, $x \neq 3$.



תרגיל לדוגמה

$$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0:

$$y' = \frac{2x(x^2-4x+3) - x^2(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{2x^3-8x^2+6x-2x^3+4x^2}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = 0$$

כלומר $-4x^2+6x = 0$ והפתרונות הם: $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$.

תרגיל לדוגמה

$$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

ב. **נקודות קיצון** – $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$.

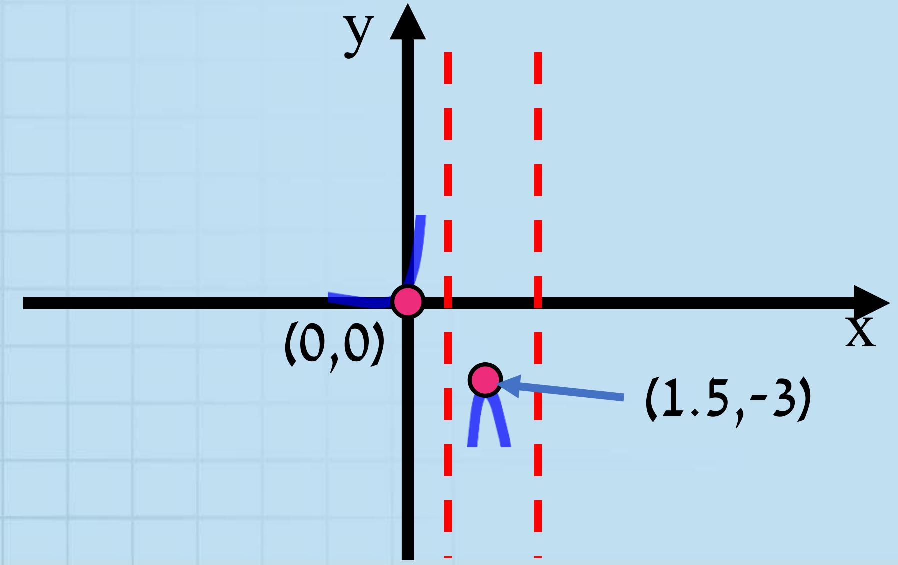
חישוב y נותן $y_1 = 0$, $y_2 = -3$.

כדי לקבוע את סוג נקודות הקיצון מספיק לגזור את **המונה** של הנגזרת הראשונה,

נקבל $-8x+6$.

לכן $(0,0)$ היא נקודת מינימום

$(1.5,-3)$ היא נקודת מקסימום.



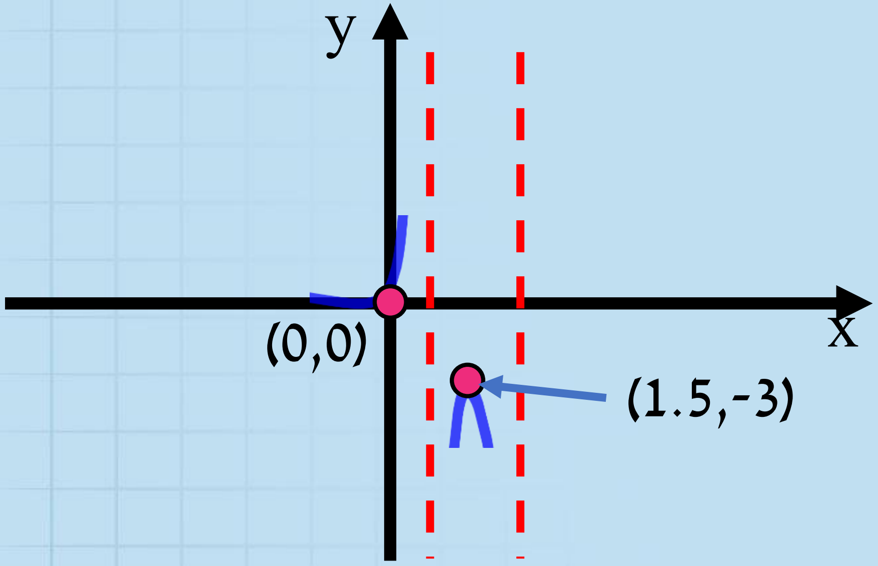
תרגיל לדוגמה

$$y=\frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

ג. **תחומי עלייה וירידה** – המכנה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ולכן נשאר לבדוק מתי המונה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי ומתי הוא שלילי.

הפתרון של אי השוויון הריבועי $-4x^2+6x>0$ הוא
$0<x<1.5$

והפתרון של אי השוויון הריבועי $-4x^2+6x<0$ הוא
$x<0$ או $x>1.5$.



בהתחשב בתחום ההגדרה של הפונקציה נקבל:

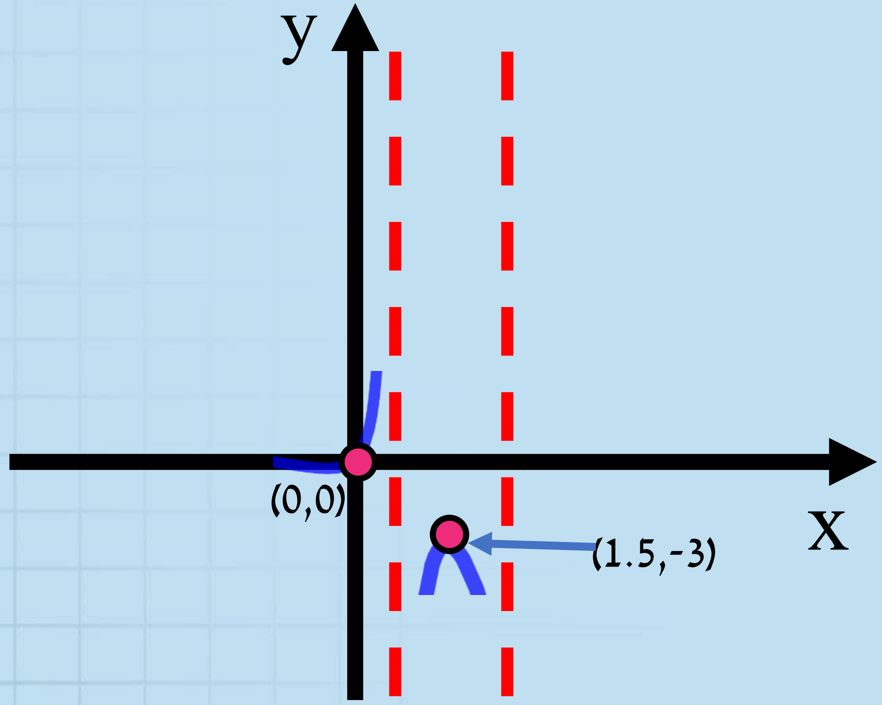
הפונקציה עולה (לחוד) בתחומים: $0<x<1$ או $1<x<1.5$

ויורדת (לחוד) בתחומים: $x<0$ או $1.5<x<3$ או $x>3$.

תרגיל לדוגמה

$$y=\frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

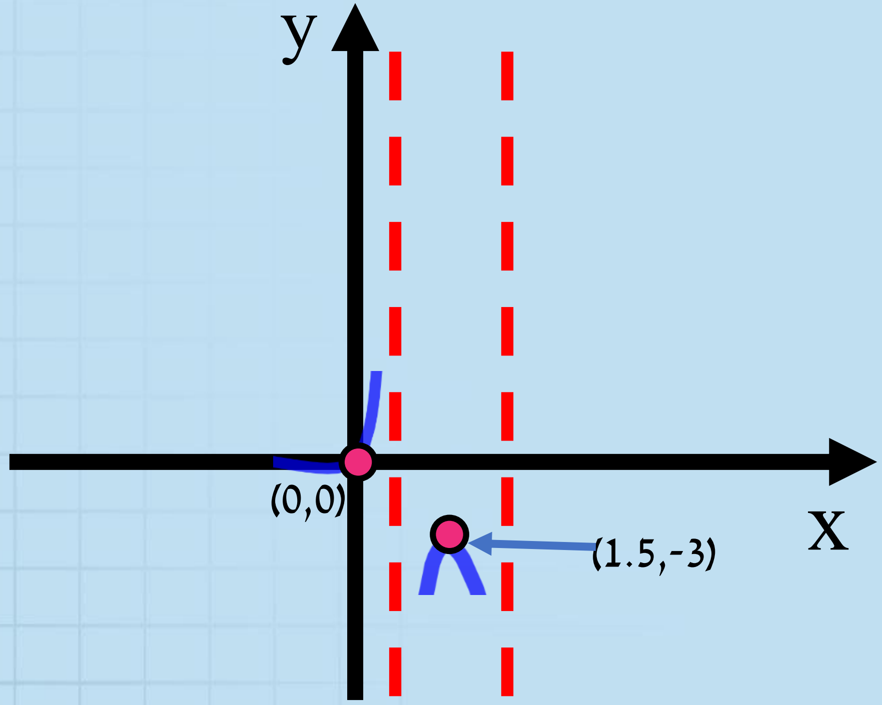
ד. **נקודות חיתוך עם הצירים** – הפונקציה חותכת את ציר ה-x ואת ציר ה-y בנקודה (0,0).



תרגיל לדוגמה

$$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

ה. **אסימפטוטות אנכיות** – המכנה שווה ל-0 עבור $x = 1$ ו-$x = 3$. קל לראות שהמונה לא מתאפס בנקודות אלה ולכן אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x הן $x = 1$ ו-$x = 3$.



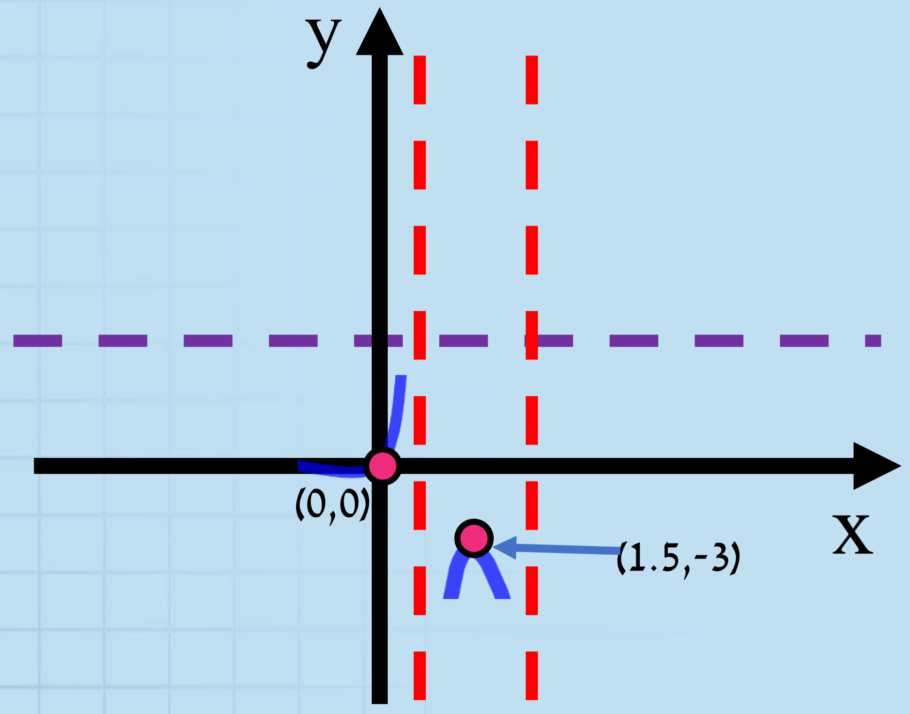
תרגיל לדוגמה

$$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והמקדם הוא 1. גם החזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 וגם כאן המקדם הוא 1. לכן אסימפטוטה אופקית היא $y = \frac{1}{1} = 1$.

לסיכום – האסימפטוטות המקבילות לצירים הן:

$x = 1$, $x = 3$, $y = 1$.

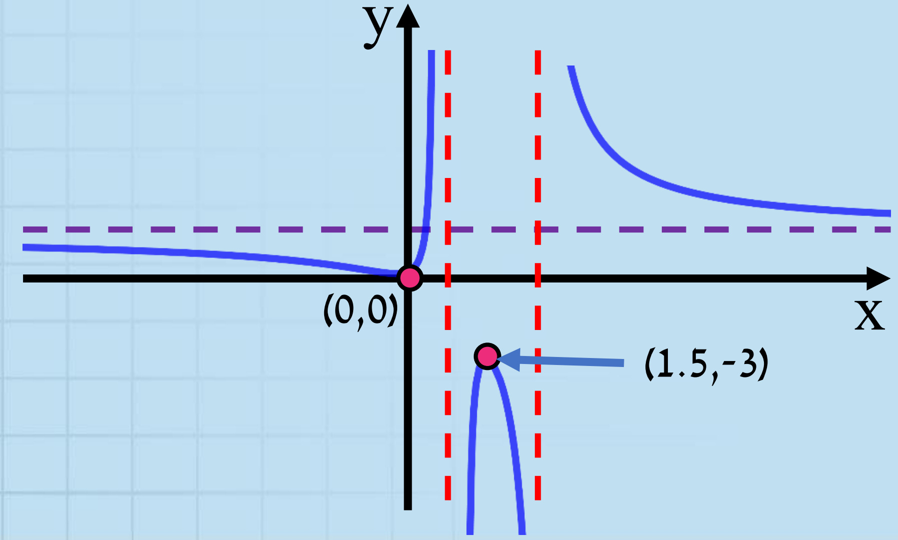


$$y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

תרגיל לדוגמה

ו. **התיאור הגרפי** – את התוצאות שקיבלנו ניתן לסכם בטבלה.

x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<1.5$	1.5	$1.5<x<3$	3	$x>3$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
עלייה ירידה	↘	מינימום	↗		↗	מקסימום	↘		↘



בהצלחה