תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 50–51, דוגמה א'

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

תרגיל לדוגמה

בסעיף זה נדון בחקירת פונקציה רציונאלית ובשרטוט הגרף שלה.

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $y = \frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

א. תחום הגדרה.
ב. נקודות קיצון.
ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטט את גרף הפונקציה.

פתרון:

א. **תחום הגדרה** – המכנה שווה לאפס כאשר $x = 0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $y=\frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0, נקבל:

$$y'=\frac{-1\cdot x^2-(1-x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x^2-2x}{x^4}=0.$$

המשוואה המתקבלת היא $x^2-2x=0$ והפתרונות הם: $x_1=0$, $x_2=2$.

הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x=0$ ולכן נותר לבדוק רק את הנקודה $x=2$.

כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון מספיק לגזור את **המונה** של הנגזרת הראשונה.

הנגזרת של x^2-2x היא $2x-2$. אם נציב $x=2$ בנגזרת זו נקבל $2\cdot 2-2=2>0$

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $y = \frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

ולכן ב-$x = 2$ יש מינימום.

חישוב ה-y נותן $y = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

כלומר, נקודת הקיצון של הפונקציה היא הנקודה $(2, -\frac{1}{4})$ והיא נקודת מינימום.

ג. **תחומי עלייה וירידה** – המכנה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ולכן נשאר לבדוק מתי המונה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי ומתי הוא שלילי. הפתרון של אי השוויון הריבועי $x^2-2x > 0$ הוא $x < 0$ או $x > 2$ והפתרון של אי השוויון הריבועי $x^2-2x < 0$ הוא $0 < x < 2$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $y = \frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

ג. **תחומי עלייה וירידה** –

לכן הפונקציה עולה בתחום $x < 0$ או $x > 2$ ויורדת בתחום $0 < x < 2$.

ד. **נקודות חיתוך עם הצירים** – כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה-x נשווה את הפונקציה לאפס. נקבל $\frac{1-x}{x^2} = 0$ ולכן $x = 1$. כלומר, הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה $(1,0)$. הפונקציה לא חותכת את ציר ה-y כי היא לא מוגדרת עבור $x = 0$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א׳:

חקור את הפונקציה $y = \frac{1-x}{x^2}$ עפ״י הסעיפים הבאים ומצא:

ה. **אסימפטוטות אנכיות** – כאשר $x = 0$ המכנה שווה לאפס והמונה לא שווה לאפס לכן הישר $x = 0$ (ציר ה-y) הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה. התנהגות הפונקציה בסביבת ה-0 היא בדומה למוסבר בדוגמא ב׳ שבעמ׳ 38. ניתן להגיע למסקנה זו גם עפ״י תחומי העלייה והירידה.

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x והחזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 לכן האסימפטוטה היא $y = 0$, כלומר ציר ה-x.

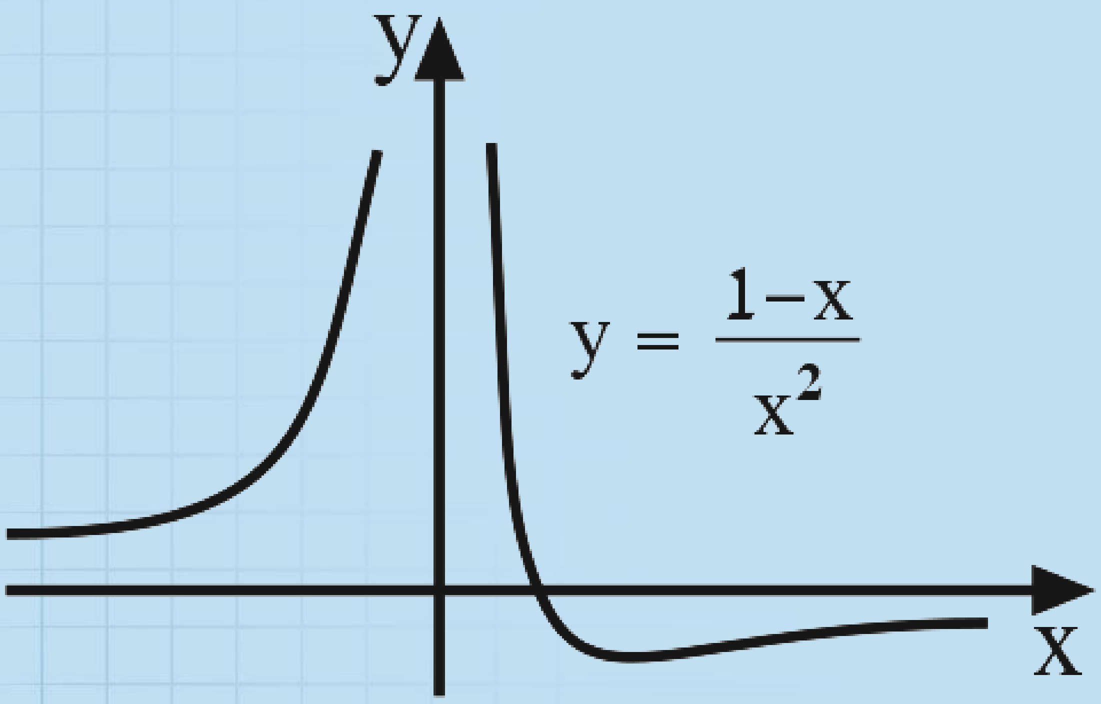
לסיכום – האסימפטוטות המקבילות לצירים הן הצירים עצמם: $x = 0$, $y = 0$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

חקור את הפונקציה $y=\frac{1-x}{x^2}$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

ו. **התיאור הגרפי** – את התוצאות שקיבלנו ניתן לסכם בטבלה. התיאור הגרפי מופיע משמאל.



x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{3}{4}$	2	לא מוגדרת	2	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{9}$
y'	+	+		–	–	0	+
עלייה ירידה	↗	↗		↘	↘	מינימום	↗

בהצלחה