פתרון תרגיל

אסימפטוטות אופקיות – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 49, ת. 40

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

40) גרף הפונקציה $y = \frac{x^2}{x^2+2x+a}$ חותך את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה שבה $x = 2$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה היא לא אי זוגית ולא זוגית.

א. מצא את a.

פתרון

חותך את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה שבה $x = 2$.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x + a}$$

החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והמקדם הוא 1

החזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 והמקדם הוא 1

לכן **האסימפטוטה האופקית** היא $y = \frac{1}{1}$ כלומר הישר $y = 1$

בנקודת החיתוך $x = 2$ ו- $y = 1$ ולכן הפונקציה עוברת בנקודה $(2 , 1)$

א. מצא את a.

פתרון

בנקודת החיתוך x = 2 ו- y = 1 ולכן הפונקציה עוברת בנקודה (2 , 1)

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x + a}$$

$$1 = \frac{2^2}{2^2 + 2 \cdot 2 + a}$$

$$1 = \frac{4}{8 + a} \quad / \cdot 8 + a$$

$$8 + a = 4 \quad / -8$$

$$a = -4$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 4}$$

$$y' = \frac{2x(x^2 + 2x - 4) - x^2(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 4)^2}$$

$$y' = \frac{2x^3 + 4x^2 - 8x - 2x^3 - 2x^2}{(x^2 + 2x - 4)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 8x}{(x^2 + 2x - 4)^2}$$

$$y' = 0$$

$$0 = 2x^2 - 8x$$

$$0 = 2x(x - 4)$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 4}$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = \frac{0^2}{0^2 + 2 \cdot 0 - 4} = 0$$

$$x_2 = 4 \quad y_1 = \frac{4^2}{4^2 + 2 \cdot 4 - 4} = 0.8$$

$(0\,,0)$ $(4\,,0.8)$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

בשלב סיווג הקיצון צריך לתקן את התזמון של ההנפשה.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 4}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 8x}{(x^2 + 2x - 4)^2}$$

מכנה הנגזרת תמיד חיובי

$$y''(\text{מונה}) = 4x - 8$$

$x = 4$

$$y''(\text{מונה}) = 8 > 0$$

מינימום$(4\ ,0.8)$

$x = 0$

$$y''(\text{מונה}) = -4 < 0$$

מקסימום$(0\ ,0)$

ג. הוכח שהפונקציה היא לא אי זוגית ולא זוגית.

פתרון

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x-4}$$

נבדוק ראשית עבור דוגמה מספרית :

$$f(1)=\frac{1}{1+2-4}=-1$$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2}{(-1)^2+2\cdot(-1)-4}=-\frac{1}{5}$$

ניתן לראות שלא מתקיים שוויון בין : $-f(x)$, $f(-x)$, $f(x)$

בהצלחה