פתרון תרגיל

טריגונומטריה – זהויות ומשוואות טריגונומטריות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–1

481 , עמ' 440, ת. 11

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

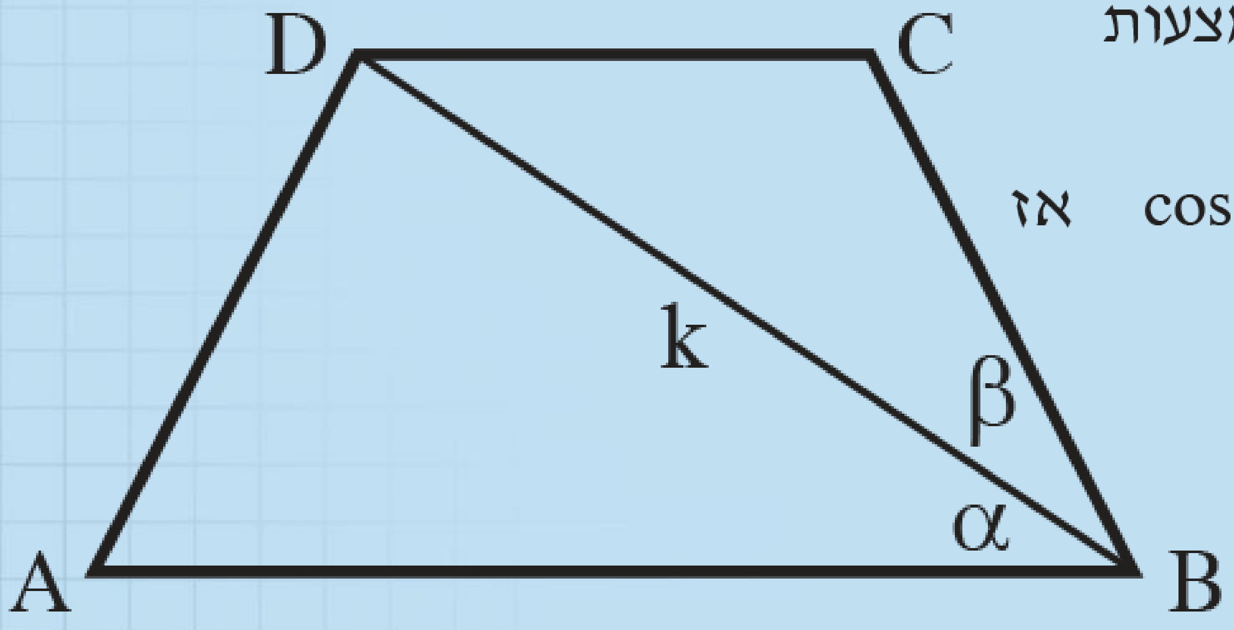
השאלה

11) ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel DC$, $AD = BC$). האלכסון BD יוצר זוית α עם הבסיס הגדול וזוית β עם השוק BC.

נתון: $BD = k$.

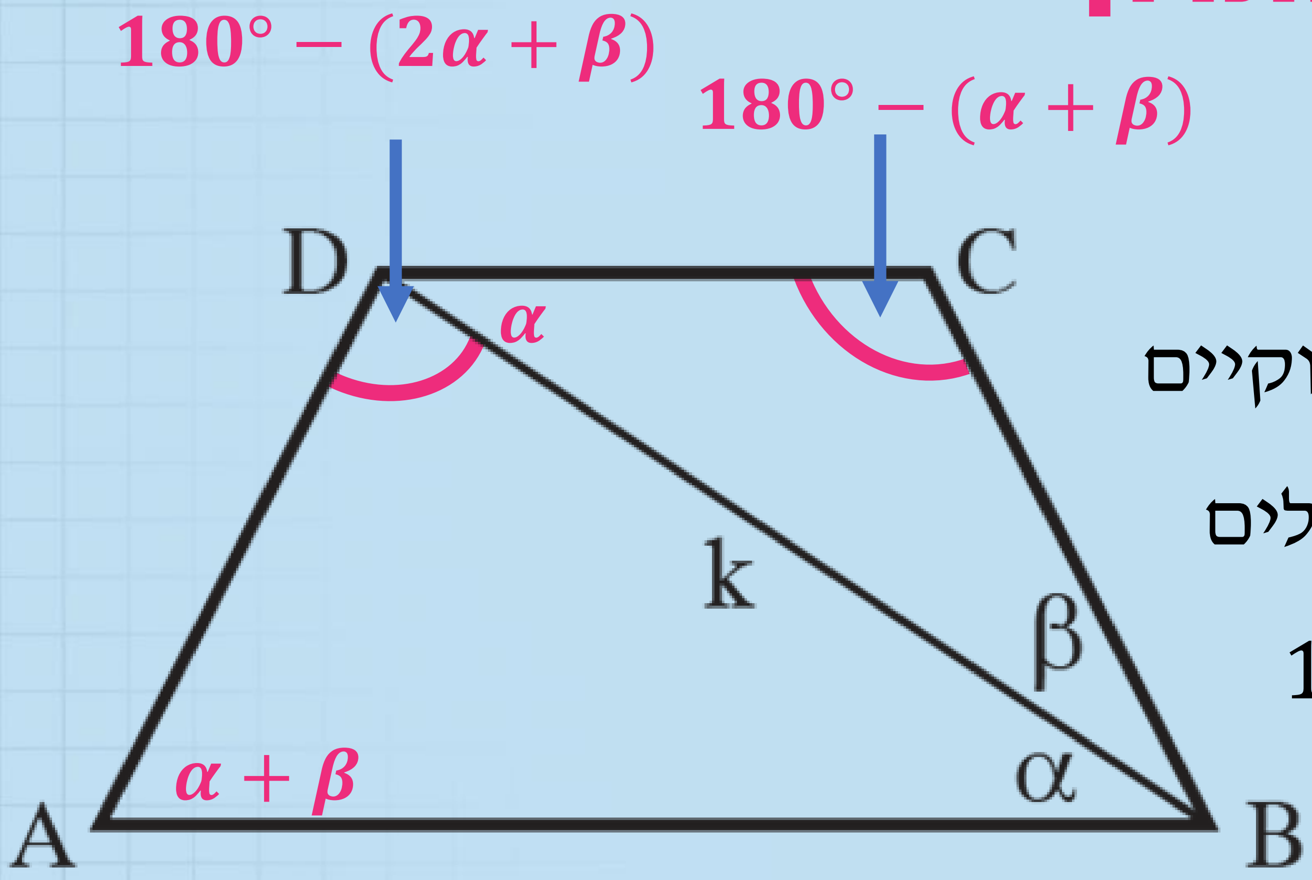
א. הבע את אורכי הבסיסים AB ו-DC באמצעות k, α ו-β.

ב. הראה שאם $\beta = 2\alpha$ ונתון $\cos2\alpha = \frac{3}{4}$ אז $\frac{DC}{AB} = \frac{2}{3}$.



ABCD הוא טרפז שווה שוקיים (AD = BC ,AB || DC).

פתרון

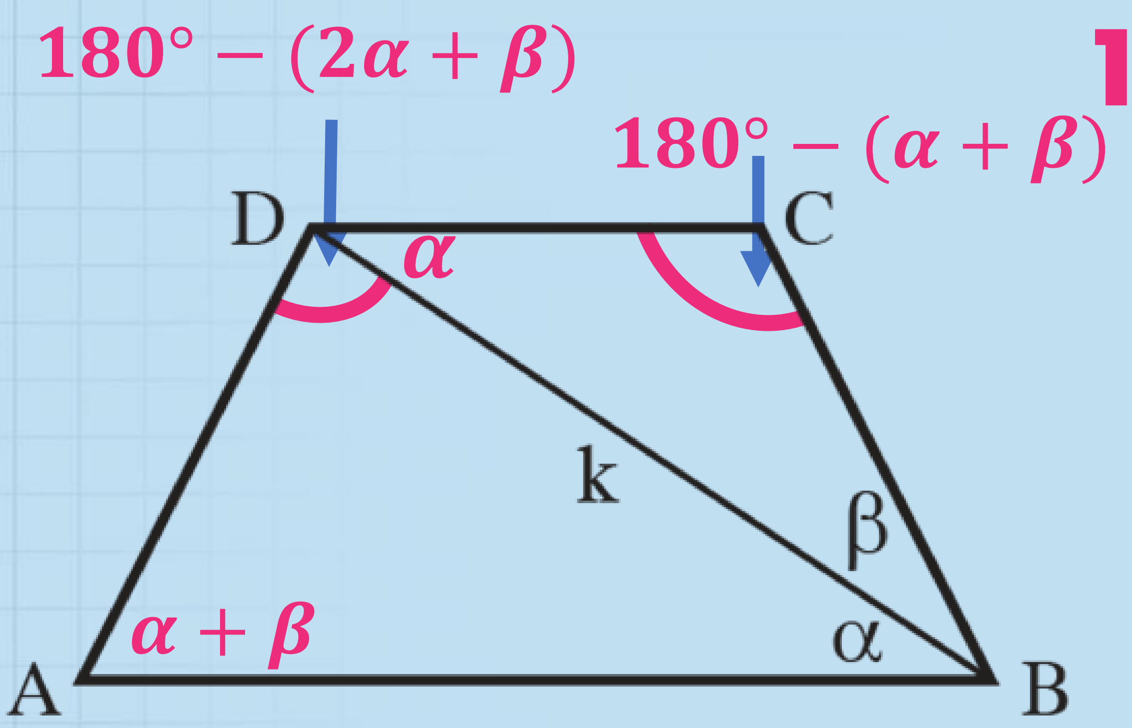


תחילה נשלים זוויות בשרטוט לפי:

- זוויות בסיס שוות בטרפז שווה-שוקיים
- זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים
- סכום הזוויות במשולש הוא $180°$

א. הבע את אורכי הבסיסים AB ו-DC באמצעות k, α ו-β.

פתרון



משפט הסינוסים במשולש ΔABD :

$$\frac{AB}{\sin[180° - (2\alpha + \beta)]} = \frac{k}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{AB}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{k}{\sin(\alpha + \beta)} \quad /\cdot \sin(2\alpha + \beta)$$

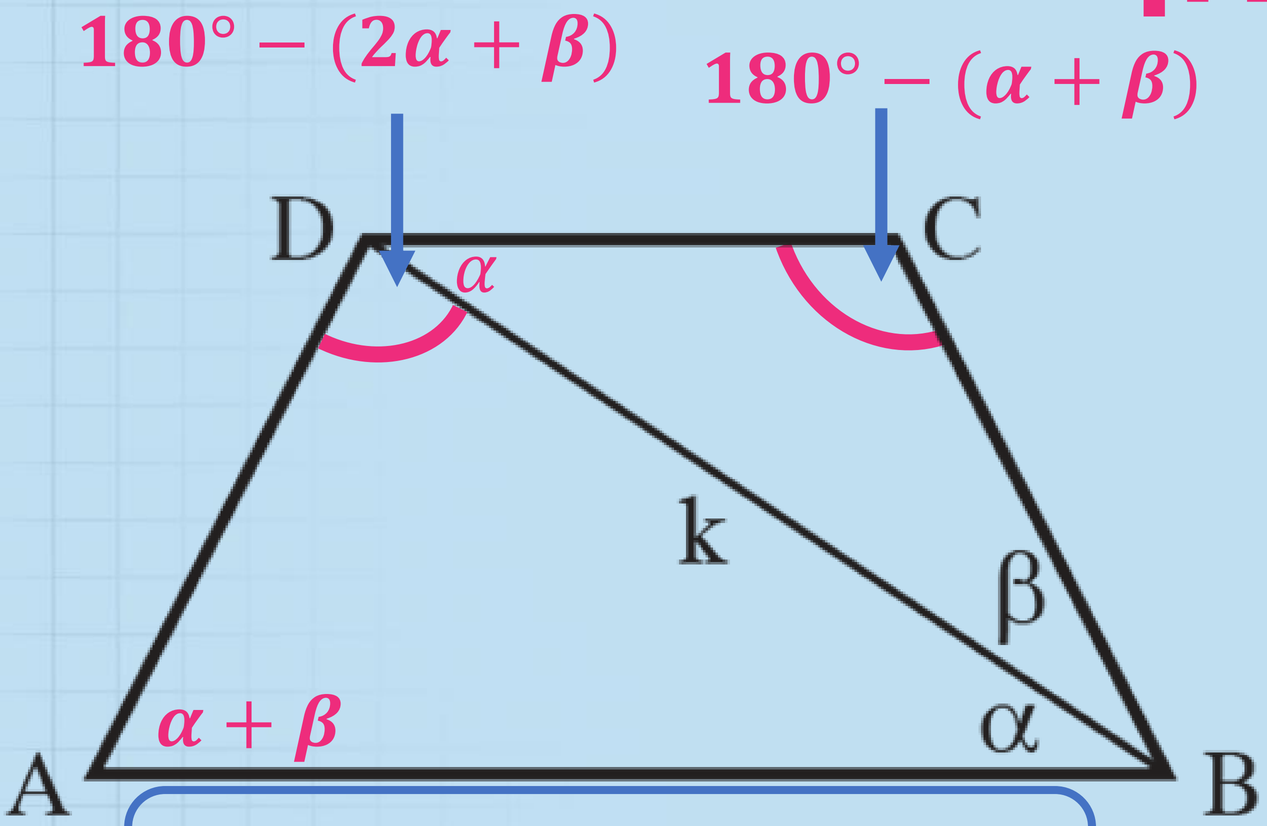
$$AB = \frac{k \cdot \sin(2\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ניעזר בזהויות:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

א. הבע את אורכי הבסיסים AB ו-DC באמצעות k, α ו-β.

פתרון



ניעזר בזהויות:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

משפט הסינוסים במשולש ΔCBD :

$$\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{k}{\sin[180° - (\alpha + \beta)]}$$

$$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{k}{\sin(\alpha + \beta)} \quad / \cdot \sin\beta$$

$$CD = \frac{k \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ב. הראה שאם $\beta = 2\alpha$ ונתון $\cos2\alpha = \frac{3}{4}$ אז $\frac{DC}{AB} = \frac{2}{3}$.

פתרון

$$\frac{DC}{AB} = \frac{\frac{k \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}{\frac{k \cdot \sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}} = \frac{\cancel{k} \cdot \sin\beta}{\cancel{\sin(\alpha+\beta)}} \cdot \frac{\cancel{\sin(\alpha+\beta)}}{\cancel{k} \cdot \sin(2\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cancel{\sin 2\alpha}}{2 \cdot \cancel{\sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha}$$

ב. הראה שאם $\beta = 2\alpha$ ונתון $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ אז $\frac{DC}{AB} = \frac{2}{3}$.

פתרון

$$\frac{DC}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{DC}{AB} = \frac{1}{2 \cdot cos2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 0.75} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

בהצלחה