הקנייה

סדרה הנדסית אינסופית וסכומה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 146–147

המצגת נערכה ע"י טל מדר

הקנייה

סדרות הנדסיות המתקבלות מסדרה הנדסית אינסופית נתונה

נניח שנתונה **סדרה הנדסית אינסופית** $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שהמנה שלה היא q,

$(-1 < q < 1, \quad q \neq 0)$. כפי שראינו, הסכום של סדרה כזאת הוא $\boxed{S = \dfrac{a_1}{1-q}}$.

נבנה מסדרה זו כמה סדרות בסיסיות. **נדגיש:** כל הסדרות המתקבלות הן סדרות **הנדסיות** אינסופיות שהמנה שלהן היא בין **1** ל-**1-** ולכן סכומן הוא מספר סופי.

הקנייה

(1) **נהפוך** את **הסימנים** של כל האיברים שנמצאים במקומות **הזוגיים** בסדרה הנתונה,
נקבל את הסדרה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא a_1 והמנה
היא $-q$. לכן **הסכום** שלה הוא: $\boxed{S = \dfrac{a_1}{1+q}}$.

(2) נשאיר בסדרה הנתונה רק את האיברים ש**במקומות האי זוגיים**, נקבל את הסדרה:
$a_1, a_3, a_5, \dots$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא a_1 והמנה היא q^2.
לכן **הסכום** שלה הוא: $\boxed{S = \dfrac{a_1}{1-q^2}}$.

(3) נשאיר בסדרה הנתונה רק את האיברים ש**במקומות הזוגיים**, נקבל את הסדרה:
$a_2, a_4, a_6, \dots$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא a_2 והמנה היא q^2.
לכן **הסכום** שלה הוא: $\boxed{S = \dfrac{a_1 q}{1-q^2}}$.

הקנייה

(4) **נחבר** כל שני איברים סמוכים של הסדרה הנתונה, נקבל את הסדרה:

$a_1+a_2\ ,\ a_2+a_3\ ,\ a_3+a_4\ ,\ ...$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא a_1+a_2 והמנה היא q.

לכן **הסכום** שלה הוא: $\boxed{S=\dfrac{a_1+a_1q}{1-q}}$.

(5) **נעלה בריבוע** את כל איברי הסדרה הנתונה, נקבל את הסדרה: $a_1^2\ ,\ a_2^2\ ,\ a_3^2\ ,\ a_4^2\ ,\ ...$.

האיבר הראשון בסדרה זו הוא a_1^2 והמנה היא q^2.

לכן **הסכום** שלה הוא: $\boxed{S=\dfrac{a_1^2}{1-q^2}}$.

(6) **נכפול** כל שני איברים סמוכים של הסדרה הנתונה, נקבל את הסדרה:

$a_1\cdot a_2\ ,\ a_2\cdot a_3\ ,\ a_3\cdot a_4\ ,\ ...$. האיבר הראשון בסדרה זו הוא a_1a_2 והמנה היא q^2.

לכן **הסכום** שלה הוא: $\boxed{S=\dfrac{a_1^2q}{1-q^2}}$.

הקנייה

דוגמא ג':

סכום טור הנדסי אינסופי יורד הוא 12 וסכום ריבועי איבריו הוא 48. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הטור המקורי.

פתרון:

אם a_1 ו-q הם בהתאמה האיבר הראשון והמנה של הטור המקורי אז a_1^2 ו-q^2 הם בהתאמה האיבר הראשון והמנה של הטור החדש.

המשוואות המתקבלות הן: $\frac{a_1}{1-q} = 12$, $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 48$.

נעלה את המשוואה הימנית בריבוע ונחלק אותה במשוואה השמאלית, נקבל לאחר צמצום $\frac{1+q}{1-q} = 3$. פתרון משוואה זו הוא $q = \frac{1}{2}$. ע"י הצבה נקבל $a_1 = 6$.

בהצלחה