הקנייה

סדרה הנדסית אינסופית וסכומה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 143–145

המצגת נערכה ע"י טל מדר

הקנייה

סדרה הנדסית אינסופית

עד כה עסקנו רק בסדרות הנדסיות בעלות מספר סופי של איברים. בסעיף זה נדון בסדרות הנדסיות בעלות **אינסוף איברים** ובסכומן. אם $a_1, a_2, \ldots$ היא סדרה אינסופית אז לביטוי $a_1 + a_2 + \ldots$ מקובל לקרוא **טור אינסופי**. למרות זאת, למען הפשטות, לא נבדיל בין המושגים סדרה וטור. נדגיש מייד שיש טעם לדיון רק אם **סכום הסדרה** (או הטור) הוא

מספר סופי. כפי שנראה, קיימים טורים הנדסיים בעלי מספר אינסופי של איברים שסכומם הוא מספר סופי. (כלומר אם נמשיך ונחבר עוד ועוד איברים הסכום לא יעבור מספר סופי וקבוע). טורים כאלה נקראים **טורים מתכנסים**. נעיר עוד שהדיון מבוסס על המושג **גבול**. לא נוכל להביא הגדרה מדוייקת של מושג זה ונסתפק בהסבר כללי.

הקנייה

נסתכל בשתי הסדרות ההנדסיות האינסופיות הבאות:

(1) $3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots$. (2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$.

האיבר הכללי של **סדרה** (1) הוא $a_n = 3^n$ והוא הולך וגדל כאשר n הולך וגדל, לכן ברור שהסכום של הסדרה גם הוא הולך וגדל ואיננו מספר סופי. (הטור נקרא במקרה כזה **טור מתבדר**). לעומת זאת האיבר הכללי של **סדרה** (2) הוא $a_n = \frac{1}{2^n}$ והוא הולך וקטן כאשר n הולך וגדל ולכן **ייתכן** שסכום כל הסדרה הוא מספר סופי.

אם נחבר, למשל, 4 איברים ראשונים נקבל $\frac{15}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$,

אם נחבר 7 איברים ראשונים נקבל $\frac{127}{128} = \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$,

כלומר, ייתכן וסכום הסדרה לא יכול לעבור את המספר 1 (ראה דוגמא א׳ סעיף (1) בעמ׳ הבא). במתמטיקה מקובל לומר במקרה כזה שהביטוי $\frac{1}{2^n}$ **שואף לאפס** כאשר n **שואף לאינסוף**. מקובל לרשום זאת באמצעות הסימן $\lim$ (גבול) באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

(הסימון ∞ פירושו אינסוף). כאמור, לא נוכל להיכנס לדיון במושג **הגבול**, שהוא מושג מרכזי בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

הקנייה

נעבור למקרה הכללי.

טענה – אם $q \neq 0$ הוא מספר המקיים $-1 < q < 1$ (כלומר q הוא שבר אמיתי), אז הביטוי q^n שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף, ז"א $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

לא נוכל במסגרת זו להביא הוכחה לטענה ונסתפק ברעיון הכללי על סמך הדוגמא האחרונה שראינו, שבה q היה שווה ל-$\frac{1}{2}$.

הקנייה

נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית

סדרה הנדסית שבה $-1 < q < 1$ $(q \neq 0)$ היא, כפי שכבר ציינו, סדרה **יורדת** או שסדרת **הערכים המוחלטים** שלה היא סדרה **יורדת**. נחשב את הסכום של סדרה כזאת ונראה שהוא מספר סופי. אם הסדרה היא $a_1 , a_1 q , a_1 q^2 , \dots , a_1 q^{n-1} , \dots$ אז הסכום הוא:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n.$$

אם $-1 < q < 1$ הרי מתקיים, כפי שראינו: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ולכן מתקיים גם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = 0$, כי מכפלה של המספר הקבוע $\frac{a_1}{1-q}$ בביטוי השואף לאפס שואפת גם היא לאפס. נקבל אם כן:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q} - 0 = \frac{a_1}{1-q}$$

ואם נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ נקבל:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית שבה $-1 < q < 1$ הוא: $\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$ $(q \neq 0)$

הקנייה

לסיכום:

בסדרה הנדסית שהמנה שלה q היא שבר $(-1 < q < 1, \quad q \neq 0)$ קיים גבול
אליו שואף סכום n האיברים הראשונים כאשר n שואף לאינסוף וגבול זה, הנקרא
סכום הסדרה, הוא $\frac{a_1}{1-q}$.

במילים אחרות:

אם $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ היא סדרת הסכומים החלקיים של טור הנדסי אינסופי
מתכנס אז איברי סדרה זו שואפים ל- $\frac{a_1}{1-q}$ כאשר n שואף לאינסוף.

הקנייה

דוגמא א':

חשב את הסכומים של הסדרות ההנדסיות האינסופיות הבאות:

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.

(2) $9, -6, 4, \ldots$.

פתרונות:

(1) עפ"י הנתון: $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ ולכן $S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

(2) כאן: $a_1 = 9$, $q = -\frac{2}{3}$ והסכום $S = \dfrac{9}{1-(-\frac{2}{3})} = \dfrac{9}{1+\frac{2}{3}} = 5.4$.

בהצלחה