פתרון תרגיל

הסכום של סדרה הנדסית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 142, ת. 59

המצגת נערכה ע"י טל מדר

השאלה

59) הסדרה $a_1, a_2, \dots, a_n$ היא סדרה הנדסית.

נסמן $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. הוכח:

א. $\left(\frac{S}{T}\right) = a_1 \cdot a_n$.

ב. $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$.

59) הסדרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא סדרה הנדסית.

נסמן $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$. הוכח: א. $(\frac{S}{T}) = a_1 \cdot a_n$.

פתרון

א.

$$T = \frac{\frac{1}{a_1}[(\frac{1}{q})^n - 1]}{\frac{1}{q} - 1}$$

$$S = \frac{a_1[q^n - 1]}{q - 1}$$

59) הסדרה $a_1, a_2, \dots, a_n$ היא סדרה הנדסית.

נסמן $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. הוכח: א. $\left(\frac{S}{T}\right) = a_1 \cdot a_n$.

פתרון

א.

$$T = \frac{\frac{1}{a_1}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{q} - 1}$$

$$S = \frac{a_1[q^n - 1]}{q - 1}$$

$$\frac{S}{T} = \frac{\frac{a_1[q^n - 1]}{q - 1}}{\frac{\frac{1}{a_1}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{q} - 1}} = \frac{\frac{a_1[q^n - 1]}{q - 1}}{\frac{\frac{1}{a_1}\left[\frac{q^n - 1}{q^n}\right]}{\frac{q - 1}{q}}} = \frac{\frac{a_1[q^n - 1]}{q - 1}}{\frac{q \cdot [q^n - 1]}{a_1 \cdot q^n \cdot (q - 1)}}$$

59) הסדרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא סדרה הנדסית.

נסמן $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$. הוכח: א. $\frac{S}{T} = a_1 \cdot a_n$.

פתרון

$$\frac{S}{T} = {a_1}^2 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot a_n$$

59) הסדרה $a_1, a_2, \dots, a_n$ היא סדרה הנדסית.

נסמן $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$. הוכח: ב. $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$.

פתרון

ב.

$$\text{אגף שמאל} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ \dots \ \cdot a_n)^2 = (a_1 \cdot a_1 q \cdot \ \dots \ \cdot a_1 q^{n-1})^2$$

$$= (a_1^n \cdot q^{1+2+\dots+n-1})^2 = a_1^{2n} \cdot \left(q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2 = \boldsymbol{a_1^{2n} \cdot q^{n(n-1)}}$$

$$\text{אגף ימין} = \left(\frac{S}{T}\right)^n = (a_1 \cdot a_n)^n = (a_1 \cdot a_1 q^{n-1})^n = \boldsymbol{a_1^{2n} \cdot q^{n(n-1)}}$$

בהצלחה