פתרון תרגיל

הסכום של סדרה הנדסית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 140, ת. 39

המצגת נערכה ע"י טל מדר

השאלה

39) נתונה סדרה הנדסית בת $2n$ איברים שהמנה שלה q $(q \neq 1)$. הוכח:

א. היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא q.

ב. היחס בין סכום n האיברים האחרונים לסכום n האיברים הראשונים הוא q^n.

ג. היחס בין סכום הסדרה לסכום n האיברים הראשונים הוא q^n+1.

ד. היחס בין סכום הסדרה לסכום הסדרה שבה הפוכים סימני האיברים שבמקומות הזוגיים הוא $\frac{1+q}{1-q}$.

ה. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא $q+1$.

ו. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $\frac{q+1}{q}$.

א. היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא q.

פתרון

א. נתון: a_{2n} ,... a_n , a_n ... , a_2, a_1 והמנה היא q

	מקומות א"ז	מקומות זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1q
מנה	q^2	q^2
מספר איברים	n	n

$$\frac{S_{\text{זוגיים}}}{S_{\text{א"ז}}} = \frac{\dfrac{a_1q[q^{2n}-1]}{q^2-1}}{\dfrac{a_1[q^{2n}-1]}{q^2-1}} = q$$

א. היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא q.

פתרון

א. נתון: a_{2n} , ... a_n, a_n ... ,a_1,a_2 והמנה היא q

$$\frac{S_{\text{זוגיים}}}{S_{\text{א"ז}}}=\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=\frac{a_1\cdot q+a_3\cdot q+\cdots+a_{2n-1}\cdot q}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}$$

$$=\frac{\cancel{(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})}\cdot q}{\cancel{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}}=q$$

ב. היחס בין סכום n האיברים האחרונים לסכום n האיברים הראשונים הוא q^n.

פתרון

ב.

	n אחרונים	n ראשונים
איבר ראשון	a_{n+1}	a_1
מנה	q	q
מספר איברים	n	n

$$\frac{S_{\text{אחרונים}}}{S_{\text{ראשונים}}}=\frac{\frac{a_{n+1}[q^n-1]}{q-1}}{\frac{a_1[q^n-1]}{q-1}}=\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{a_1q^n}{a_1}=q^n$$

ב. היחס בין סכום n האיברים האחרונים לסכום n האיברים הראשונים הוא q^n.

פתרון

ב. נראה דרך נוספת :

$$\frac{S_{\text{אחרונים}}}{S_{\text{ראשונים}}} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \frac{a_1 q^n + a_2 q^n + \cdots + a_n q^n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{\cancel{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} q^n}{\cancel{a_1 + a_2 + \cdots a_n}} = q^n$$

ג. היחס בין סכום הסדרה לסכום n האיברים הראשונים הוא q^n+1.

פתרון

ג.

	הסדרה כולה	n ראשונים
איבר ראשון	a_1	a_1
מנה	q	q
מספר איברים	2n	n

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1[q^{2n}-1]}{q-1}}{\frac{a_1[q^n-1]}{q-1}}=\frac{(q^n+1)(q^n-1)}{q^n-1}=q^n+1$$

ד. היחס בין סכום הסדרה לסכום הסדרה שבה הפוכים סימני האיברים שבמקומות הזוגיים הוא $\frac{1+q}{1-q}$.

פתרון

ד.

	סדרה מקורית	סדרת סימנים הפוכים
איבר ראשון	a_1	a_1
מנה	q	$-q$
מספר איברים	2n	2n

$$\frac{S_{\text{מקורית}}}{S_{\text{סימנים הפוכים}}}=\frac{\frac{a_1[q^{2n}-1]}{q-1}}{\frac{a_1[(-q)^{2n}-1]}{-q-1}}=\frac{-q-1}{q-1}=\frac{1+q}{1-q}$$

ה. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא $q+1$.

פתרון

ה.

	סדרה מקורית	סדרת אברים במקומות אי-זוגיים
איבר ראשון	a_1	a_1
מנה	q	q^2
מספר איברים	2n	n

$$\frac{S_{\text{מקורית}}}{S_{\text{מקומות אי זוגית}}}=\frac{\frac{a_1[q^{2n}-1]}{q-1}}{\frac{a_1[(q^2)^n-1]}{q^2-1}}=\frac{\frac{a_1[q^{2n}-1]}{q-1}}{\frac{a_1[q^{2n}-1]}{q^2-1}}=\frac{q^2-1}{q-1}=\frac{(q-1)(q+1)}{q-1}=q+1$$

ו. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $\frac{q+1}{q}$.

פתרון

ו.

	סדרה מקורית	מקומות זוגיים
איבר ראשון	a_1	$a_1 q$
מנה	q	q^2
מספר איברים	2n	n

$$\frac{S_{\text{מקורית}}}{S_{\text{זוגיים}}} = \frac{\frac{a_1[q^{2n}-1]}{q-1}}{\frac{a_1 q[q^{2n}-1]}{q^2-1}} = \frac{q^2-1}{q(q-1)} = \frac{(q-1)(q+1)}{q(q-1)} = \frac{q+1}{q}$$

בהצלחה