הקנייה

סדרה הנדסית – איבר כללי

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 119–121

המצגת נערכה ע"י טל מדר

הקנייה

הגדרת הסדרה ההנדסית

נגדיר עכשיו את הסדרה ההנדסית:

הגדרת הסדרה ההנדסית – סדרת מספרים שהאיבר הראשון שלה שונה מאפס וכל איבר שלה (החל מהשני) מתקבל מהאיבר הקודם לו ע"י כפל במספר קבוע השונה מאפס נקראת סדרה הנדסית (גיאומטרית).

המספר **הקבוע** נקרא **מנת הסדרה**. מקובל לסמן את מנת הסדרה באות **q**. זאת **ההגדרה** בעזרת **נוסחת נסיגה** של הסדרה ההנדסית. עפ"י ההגדרה, אם האיבר הראשון הוא **a** אז מתקיים:

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , a_1 = a}$$

($a \neq 0$, $q \neq 0$, n טבעי)

דוגמאות לסדרות הנדסיות:

(1) $q = 2$ $\quad 3, 6, 12, 24, \ldots$

(2) $q = 3$ $\quad -2, -6, -18, -54, \ldots$

(3) $q = \frac{1}{3}$ $\quad 81, 27, 9, 3, \ldots$

(4) $q = \frac{3}{4}$ $\quad -64, -48, -36, -27, \ldots$

(5) $q = -4$ $\quad 1, -4, 16, -64, \ldots$

(6) $q = -\frac{1}{2}$ $\quad 200, -100, 50, -25, \ldots$

הקנייה

הערות:

א) נבחין בסוגי הסדרות בהתאם למנה q והאיבר הראשון a_1:

מקרה ראשון: $q > 1$. אם $a_1 > 0$ הסדרה עולה (דוגמא (1)) ואם $a_1 < 0$ הסדרה יורדת (דוגמא (2)).

מקרה שני: $0 < q < 1$. אם $a_1 > 0$ הסדרה יורדת (דוגמא (3)) ואם $a_1 < 0$ הסדרה עולה (דוגמא (4)).

מקרה שלישי: $q < 0$. במקרה זה הסדרה לא עולה ולא יורדת (דוגמאות (5) ו-(6)).

המקרה $q = 0$ לא ייתכן ואילו במקרים $q = 1$ (כל איברי הסדרה שווים) או $q = -1$ (הערכים המוחלטים של איברי הסדרה שווים) לא נעסוק בדרך כלל.

הקנייה

ב) **תכונת הסדרה ההנדסית – כל איבר בסדרה הנדסית חיובית** (פרט לראשון) הוא **הממוצע ההנדסי של שני האיברים הסמוכים לו.** (מספר b נקרא ממוצע הנדסי (גיאומטרי) של המספרים a ו-c אם מתקיים $b = \sqrt{ac}$). אם c, b, a הם שלושה איברים

סמוכים של סדרה הנדסית חיובית שהמנה שלה q אז מתקיים $q = \frac{b}{a}$ וגם $q = \frac{c}{b}$, ז"א $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, כלומר $\boxed{\mathbf{b^2 = ac}}$ או $b = \sqrt{ac}$. (אם בסדרה איברים שליליים אז התכונה הנ"ל נכונה לערכים המוחלטים שלהם ובכל מקרה נכון הקשר $b^2 = ac$).

הקנייה

דוגמא ה' (תכונת הסדרה ההנדסית):

המספרים $2x+7$, $x+2$, x מהווים שלושה איברים סמוכים של סדרה הנדסית. מצא את x ואת המספרים.

פתרון:

עפ"י התכונה של הסדרה ההנדסית מתקיים $q=\frac{x+2}{x}$ וגם $q=\frac{2x+7}{x+2}$.

לכן $\frac{2x+7}{x+2}=\frac{x+2}{x}$ ומכאן $(x+2)^2=x(2x+7)$. (ראה גם הערה ב' בעמ' 121).

המשוואה הריבועית המתקבלת היא $x^2+3x-4=0$ והפתרונות הם $x_1=1$, $x_2=-4$.

עבור $x_1=1$ נקבל את המספרים 9, 3, 1 כלומר $q_1=3$.

עבור $x_2=-4$ נקבל את המספרים 1−, 2−, 4− כלומר $q_2=\frac{1}{2}$.

בהצלחה