# פתרון תרגיל

## נקודות פיתול ותחומי קעירות – פונקציות טריגונומטריות

## מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

**581 , עמ' 243, ת. 29**

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

# השאלה

29) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

היעזר ב-$a$ במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.

ב. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וסמן על הגרף את נקודות הפיתול.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת הפיתול הפנימית של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

ז. מצא את התחום בו $f'(x)$ שלילית וגם $f''(x)$ שלילית.

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.

# פתרון

**נדרוש: $f'(x) = 0$**

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2\cos 2x}{4} - a\sin x = \frac{1 - \cos 2x - 2a\sin x}{2}$$

עפ"י הזהות: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$= \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x) - 2a\sin x}{2} = \sin^2 x - a\sin x$$

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.

# פתרון

$$f'(x) = sin^2 x - asin\, x = sin\, x\,(sinx - a) = 0$$

$$sin\, x = 0 \qquad \cancel{sin\, x = a}$$

$$x = \pi k \qquad 2 < a$$

פתרונות בתחום: $x = 0\,, \pi\,, 2\pi$

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+a\cos x$,   $a>2$,   בתחום   $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.

# פתרון

**נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת הראשונה $f'(x)$**

$$f'(x)=\sin x\,(\sin x\ -a)$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | ↘ | $x=\pi$ | ↗ | $x=2\pi$ |
| | $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ | | $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)>0$ | |

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.

# פתרון

$$f(0) = 0 - \frac{\sin 0}{4} + a\cos 0 = a$$

$(0,a)$
נקודת מקסימום

$$f(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} + a\cos\pi = \frac{\pi}{2} - a$$

$\left(\pi, \frac{\pi}{2} - a\right)$
נקודת מינימום

$$f(2\pi) = \pi - \frac{\sin 2\cdot 2\pi}{4} + a\cos 2\pi = \pi + a$$

$(2\pi, \pi + a)$
נקודת מקסימום

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.

# פתרון

**תחומי עליה של $f(x)$ :**

$$\pi < x < 2\pi$$

**תחומי ירידה של $f(x)$ :**

$$0 < x < \pi$$

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+a\cos x$, $a>2$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ב. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

# פתרון

**נדרוש: $f''(x)=0$**

$$f''(x)=(sin^2x-asin\,x)'=2\,sin\,x\,cos\,x-acos\,x=0$$

$$cos\,x\,(2\,sin\,x-a)=0$$

$$cos\,x=0 \qquad \cancel{sin\,x=\frac{a}{2}}$$

$$2<a$$

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+a\cos x$, $a>2$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ב. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

# פתרון

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

פתרונות בתחום:

$$x=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$$

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

# פתרון

**נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$**

$$f''(x) = \cos x\,(2\sin x - a)$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 0$ | $\cap$ | $x = \frac{\pi}{2}$ | $\cup$ | $x = \frac{3}{2}\pi$ | $\cap$ | $x = 2\pi$ |
| | $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ | | $f''(\pi) > 0$ | | $f''\left(\frac{7}{4}\pi\right) < 0$ | |

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+a\cos x$, $a>2$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ב. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

# פתרון

עבור $\frac{3}{2}\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ הפונקציה משנה תחום קעירות ולכן מדובר בנקודות פיתול

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{4}+a\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

**נקודת פיתול**

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sin 2\cdot\frac{3}{2}\pi}{4}+a\cos\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{4}\pi$$

$\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{4}\pi\right)$

**נקודת פיתול**

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

# פתרון

**תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ :**

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$$

**תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ :**

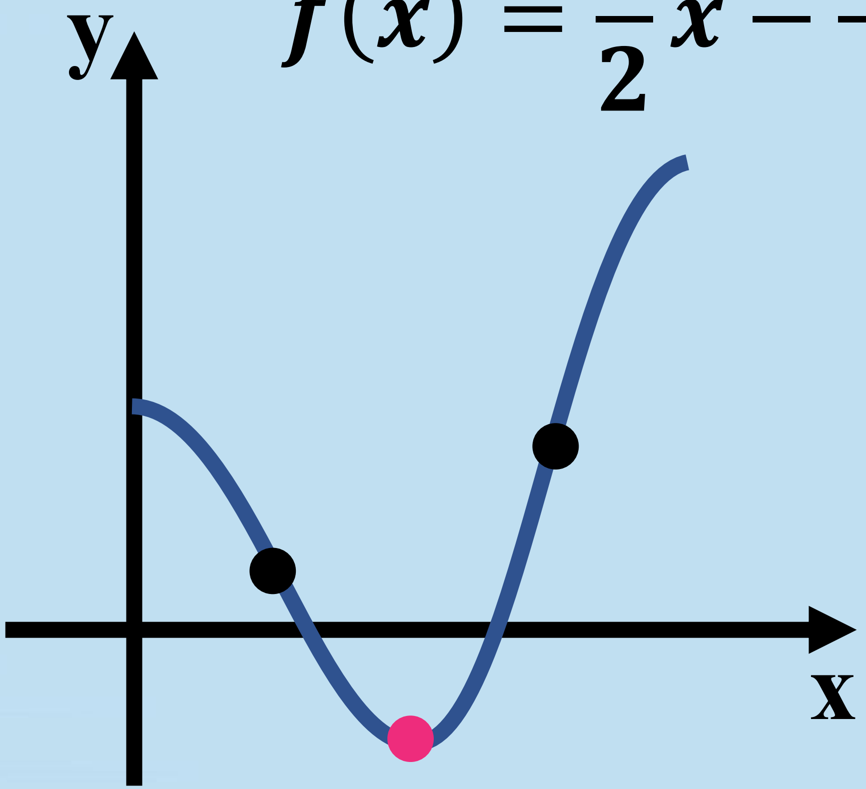
$$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \quad \text{או} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin2x}{4}+a\cos x$, $a>2$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וסמן על הגרף את נקודות הפיתול.

# פתרון

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin2x}{4}+a\cos x$$



$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

# פתרון

$$f'(x) = \sin^2 x - a\sin x$$

עפ"י סעיף ב' :

$$f''(x) = \cos x\,(2\sin x - a)$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 0$ | ↘ | $x = \frac{\pi}{2}$ | ↗ | $x = \frac{3}{2}\pi$ | ↘ | $x = 2\pi$ |
| | $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ | | $f''(\pi) > 0$ | | $f''\left(\frac{7}{4}\pi\right) < 0$ | |

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

# פתרון

$$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 + a$$

$\left(\frac{3}{2}\pi, 1 + a\right)$

**נקודת מקסימום**

$$f'(0) = 0 - 0 = 0$$

$(0,0)$

**נקודת מקסימום**

$$f'(2\pi) = 0 - 0 = 0$$

$(2\pi, 0)$

**נקודת מינימום**

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - a$$

$\left(\frac{\pi}{2}, 1 - a\right)$

**נקודת מינימום**

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + a\cos x$, $a > 2$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

# פתרון

**תחומי עליה של $f'(x)$:**

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$$

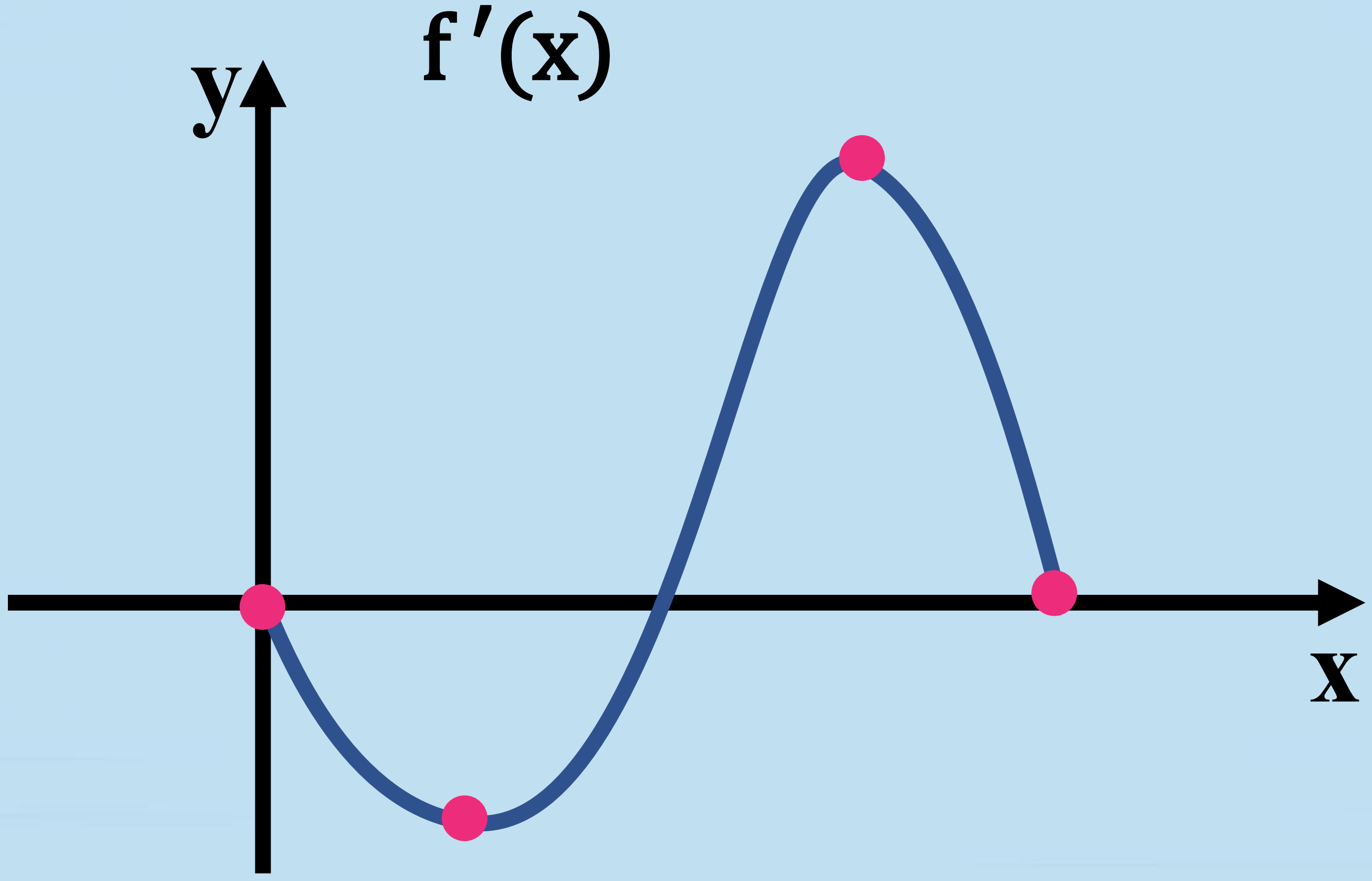
**תחומי ירידה של $f'(x)$:**

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ **או** $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+a\cos x$, $a>2$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

# פתרון



ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת הפיתול הפנימית של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

# פתרון

**נדרוש: $g''(x) = 0$**

$$g''(x) = f'(x) = sin^2 x - asin\,x = 0$$

לפי סעיף א': $\boldsymbol{x = \pi}$

הוכחנו כי בנקודה זו $f'(x)$ מחליפה סימן. כלומר, הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$ מחליפה סימן ומכאן שיש שינוי בתחום הקעירות הפונקציה ומדובר בנקודת פיתול

ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת הפיתול הפנימית של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

# פתרון

**תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ייקבעו עפ"י סימן הנגזרת השנייה**

$$g''(x) = f'(x) = sin^2x - asin\,x$$

בסעיף א' מצאנו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$

ו. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת הפיתול הפנימית של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

# פתרון

**תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ :**

$$\pi < x < 2\pi$$

**תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ :**

$$0 < x < \pi$$

ז. מצא את התחום בו $f'(x)$ שלילית וגם $f''(x)$ שלילית.

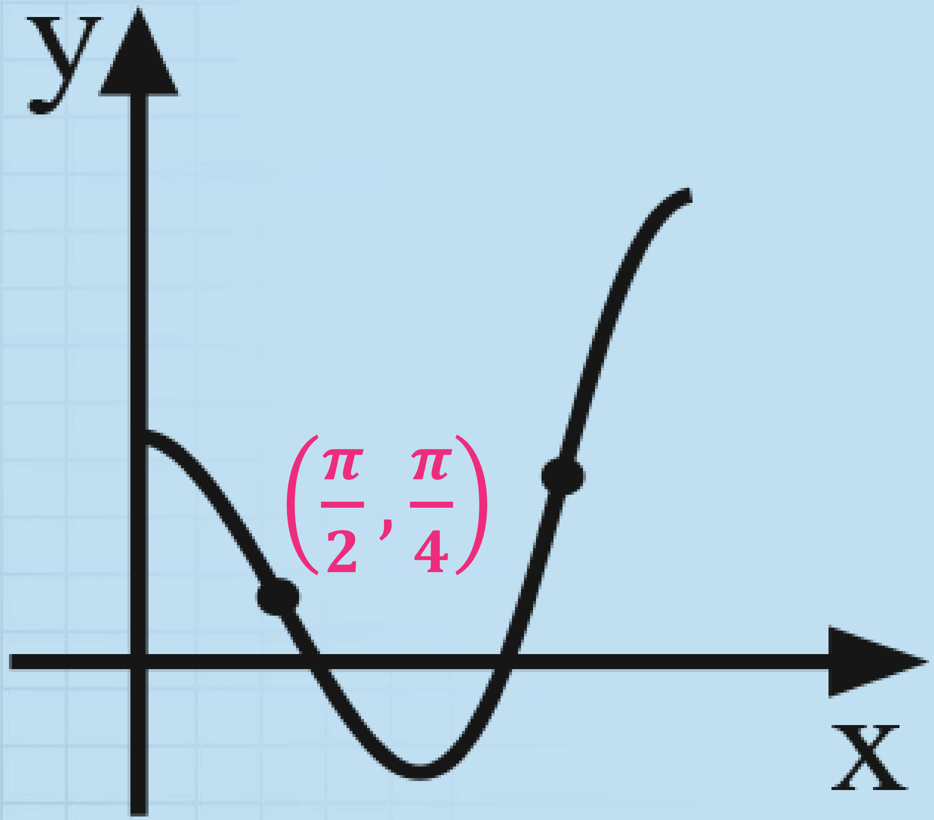
# פתרון

נתייחס לשאלה במשמעותה הגרפית, עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$

עלינו לחפש תחום בו הפונקציה יורדת
($f'(x)$ שלילית) וגם קעורה כלפי מטה ($f''(x)$ שלילית)

ז. מצא את התחום בו $f'(x)$ שלילית וגם $f''(x)$ שלילית.

# פתרון




$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

# בהצלחה