פתרון תרגיל

נקודות פיתול ותחומי קעירות – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 241, ת. 21

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

21) נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. גזור והוכח שהנגזרת של הפונקציה היא $f'(x) = -\sin 4x$.

ב. מצא בתחום הנתון את:

(1) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(2) נקודות הפיתול של הפונקציה.

(3) התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ וקעורה כלפי מטה $\cap$.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובה לסעיף ב' (1) ומצא בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ את:

(1) שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$.

(2) תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של $g(x)$.

ד. מצא לאילו ערכי k אין פתרון למשוואה $\sin^4 x + \cos^4 x = k$.

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. גזור והוכח שהנגזרת של הפונקציה היא $f'(x) = -\sin 4x$.

פתרון

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x + 4\cos^3 x \cdot (-\sin x)$$

$$= 4\underbrace{\sin x \cos x}\underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}$$

עפ"י הזהות:
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

עפ"י הזהות:
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. גזור והוכח שהנגזרת של הפונקציה היא $f'(x) = -\sin 4x$.

פתרון

$$f'(x) = 2\sin 2x \cdot (-\cos 2x)$$

עפ״י הזהות: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$f'(x) = -\sin 4x$$

נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (1) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

נדרוש: $f'(x)=0$

$$f'(x)=-\sin 4x=0$$

$$4x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{4}k$$

פתרונות בתחום: $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (1) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$x = \frac{\pi}{4}$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

$$f''(x) = (-\sin 4x)' = -4\cos 4x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos 4 \cdot \frac{\pi}{4} > 0$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (1) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

עבור $x = \frac{\pi}{4}$ לפונקציה נקודת מינימום

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ נקודת מינימום

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (1) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

נקודות קיצון קצה:

$$x = 0 \qquad f(0) = \sin^4(0) + \cos^4(0) = 1 \qquad (0, 1)$$

נקודת מקסימום, כי החל ממנה הפונקציה יורדת אל נקודת המינימום הפנימית

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (1) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

נקודות קיצון קצה:

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

נקודת מקסימום, כי עד אליה הפונקציה עולה מנקודת המינימום הפנימית

נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (2) נקודות הפיתול של הפונקציה.

פתרון

נדרוש: $f''(x)=0$

$$f''(x)=-4\cos 4x=0$$

$$4x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$$

פתרונות בתחום:

$$x=\frac{\pi}{8},\frac{3}{8}\pi$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (2) נקודות הפיתול של הפונקציה.

פתרון

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות ערך הנגזרת השלישית $f'''(x)$

$$f'''(x) = (-4\cos 4x)' = 16\sin 4x$$

$$x = \frac{\pi}{8} \qquad f'''\left(\frac{\pi}{8}\right) \neq 0$$

עבור $x = \frac{\pi}{8}$ לפונקציה נקודת פיתול

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$ נקודת פיתול

נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (2) נקודות הפיתול של הפונקציה.

פתרון

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות ערך הנגזרת השלישית $f'''(x)$

$$f'''(x)=(-4\cos 4x)'=16\sin 4x$$

$$x=\frac{3}{8}\pi \qquad f'''\left(\frac{3}{8}\pi\right)\neq 0$$

עבור $x=\frac{3}{8}\pi$ לפונקציה נקודת פיתול

$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right)=\frac{3}{4}$$

$\left(\frac{3}{8}\pi,\frac{3}{4}\right)$ נקודת פיתול

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (3) התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ וקעורה כלפי מטה $\cap$.

פתרון

תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ייקבעו עפ"י סימן הנגזרת השנייה

$$f''(x) = -4\cos 4x$$

נציב ערכים מייצגים בכל אחד מהתחומים שנוצרו ע"י נקודות הפיתול, תוך התחשבות בתחום השאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (3) התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ וקעורה כלפי מטה $\cap$.

פתרון

$$f''(x) = -4\cos 4x$$

$x = 0$		$x = \frac{\pi}{8}$		$x = \frac{3}{8}\pi$		$x = \frac{\pi}{2}$
	$f''\left(\frac{\pi}{16}\right) < 0$		$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$		$f''\left(\frac{3.5}{8}\pi\right) < 0$	

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ב. מצא בתחום הנתון את: (3) התחומים שבהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ וקעורה כלפי מטה $\cap$.

פתרון

תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$:

$$\frac{\pi}{8} < x < \frac{3}{8}\pi$$

תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$:

$$0 < x < \frac{\pi}{8} \quad \text{או} \quad \frac{3}{8}\pi < x < \frac{\pi}{2}$$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובה לסעיף ב' (1) ומצא בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ את: (1) שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$.

פתרון

נדרוש: $g''(x) = 0$

$$g''(x) = f'(x) = -\sin 4x = 0$$

פתרונות בתחום:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

הוכחנו כי בנקודה זו $f'(x)$ מחליפה סימן. כלומר, הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$ מחליפה סימן ומכאן שיש שינוי בתחום הקעירות הפונקציה ומדובר בנקודת פיתול

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובה לסעיף ב' (1) ומצא בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ את: (2) תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של $g(x)$.

פתרון

תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ייקבעו עפ"י סימן הנגזרת השנייה

$$g''(x) = f'(x) = -\sin 4x$$

עפ"י תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ נוכל להסיק את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובה לסעיף ב' (1) ומצא

בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ את: (2) תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של $g(x)$.

פתרון

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ נקודת מינימום של $f(x)$

תחומי עליה של $f(x)$

ותחומי חיוביות של $f'(x) = g''(x)$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

תחומי ירידה של $f(x)$

ותחומי שליליות של $f'(x) = g''(x)$

$$0 < x < \frac{\pi}{4}$$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובה לסעיף ב' (1) ומצא בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ את: (2) תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של $g(x)$.

פתרון

תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$:

$$0 < x < \frac{\pi}{4}$$

ד. מצא לאילו ערכי k אין פתרון למשוואה $\sin^4 x + \cos^4 x = k$.

פתרון

נתייחס למשוואה האלגברית במשמעותה הגרפית.
אגף שמאל הוא הפונקציה אותה חקרנו, ואגף ימין הוא הישר $y = k$

למעשה, אנו נשאלים, לאילו ערכי k הישר **אינו** חותך את גרף הפונקציה

נתייחס לשיעורי ה- y של נקודות הקיצון של הפונקציה.
לערכי הקיצון המוחלטים שלה

ד. מצא לאילו ערכי k אין פתרון למשוואה $\sin^4 x + \cos^4 x = k$.

פתרון

הפונקציה חסומה מלמעלה ע״י המקסימום המוחלט שלה $y = 1$

הפונקציה חסומה מלמטה ע״י המינימום המוחלט שלה $y = \frac{1}{2}$

עבור ערכי $1 < k$ או $k < \frac{1}{2}$ הישר לא יחתוך את גרף הפונקציה,
ולא יהיו פתרונות למשוואה.

בהצלחה