פתרון תרגיל

חקירת פונקציה – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 231, ת. 31

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

31) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax - \operatorname{tg}x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{6}$ הוא $\frac{8}{3}$.

א. מצא את a.

ב. עבור ה- a שמצאת בסעיף א' חקור את הפונקציה בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ומצא:

(1) תחום הגדרה.
(2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה.
(4) אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x.
(5) שרטט את גרף הפונקציה.

ג. הוכח שלכל x בתחום $0 \le x \le \frac{11}{25}\pi$ מתקיים: $4x \ge \operatorname{tg}x$.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. ידוע שהאסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ הן כמו של הפונקציה $f(x)$. נתון גם: $g(0) = 0$. שרטט סקיצה (בצורה כללית) של גרף הפונקציה $g(x)$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax - tg\,x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{6}$ הוא $\frac{8}{3}$.

א. מצא את a.

פתרון

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{8}{3}$$

$$f'(x) = a - \frac{1}{cos^2 x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = a - \frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = a - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax - tg\,x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{6}$ הוא $\frac{8}{3}$.

א. מצא את a.

פתרון

$$a - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\boldsymbol{a = 4}$$

$f(x) = 4x - tg\,x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (1) תחום הגדרה.

פתרון

תחום הגדרה: $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$cos\,x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

פתרונות בתחום: $\boldsymbol{x \neq \pm\frac{\pi}{2}}$

$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$$

$f(x) = 4x - tg\,x$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (2) נקודות קיצון.

פתרון

נדרוש: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{cos^2x} = \frac{4cos^2x - 1}{cos^2x} = 0$$

$$cos^2x = \frac{1}{4}$$

$$cosx = \pm\frac{1}{2}$$

$f(x) = 4x - tg\,x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (2) נקודות קיצון.

פתרון

$$cosx = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi$$

$$cosx = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

פתרונות בתחום:

$$x = \pm\frac{\pi}{3}$$

$f(x) = 4x - tg\,x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (2) נקודות קיצון.

פתרון

$$x = \pm\frac{\pi}{3}$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ״י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

$$(4cos^2x - 1)' = 4 \cdot 2\cos x \; \cdot - sin\,x = -4\,sin\,2x$$

$f(x) = 4x - tg\, x$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (2) נקודות קיצון.

פתרון

$$(4cos^2 x - 1)' = -4\, sin\, 2x$$

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad\qquad -4\, sin\, 2 \cdot \frac{\pi}{3} < 0$$

עבור $x = \frac{\pi}{3}$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{3} = 2.46$$

$\left(\frac{\pi}{3}, 2.46\right)$ נקודות מקסימום

$f(x) = 4x - tg\,x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (2) נקודות קיצון.

פתרון

$$(4cos^2x - 1)' = -4\,sin\,2x$$

$$x = -\frac{\pi}{3} \qquad\qquad -4\,sin\,2 \cdot -\frac{\pi}{3} > 0$$

עבור $x = -\frac{\pi}{3}$ לפונקציה נקודת מינימום

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) - tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2.46$$

נקודת מינימום $\left(-\frac{\pi}{3}, -2.46\right)$

$f(x) = 4x - tg\, x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (2) נקודות קיצון.

פתרון

הפונקציה מוגדרת בתחום פתוח $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ולכן אין נקודות קיצון קצה

$f(x) = 4x - tg\,x \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (3) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

עד נקודת המינימום, $x = -\frac{\pi}{3}$, הפונקציה יורדת ולאחריה היא עולה

עד לנקודת המקסימום, $x = \frac{\pi}{3}$, ולאחריה היא יורדת.

נשלב גם את תחום ההגדרה של הפונקציה $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

תחום עלייה: $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

תחום ירידה: $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$ **או** $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

$f(x) = 4x - tg\, x$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (4) אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x.

פתרון

נביא את הפונקציה לתבנית מנה:

$$f(x) = 4x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4x\cos x - \sin x}{\cos x}$$

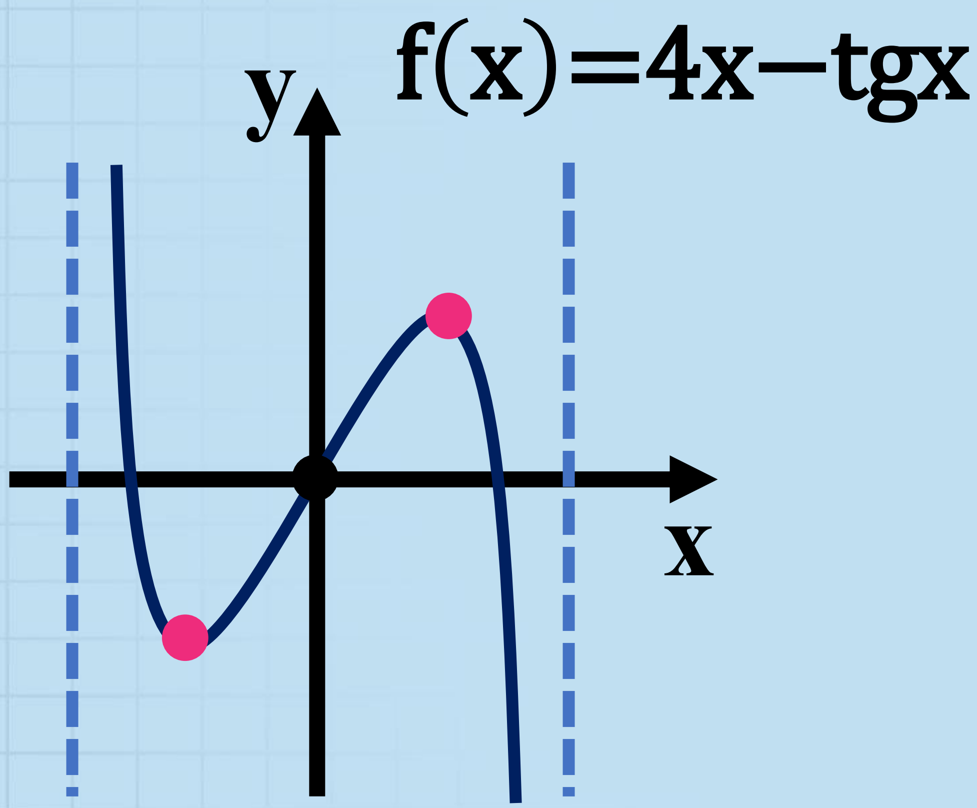
הערכים $x = \pm\frac{\pi}{2}$ מאפסים את המכנה ולא את המונה

$$\Downarrow$$

הישרים $x = \pm\frac{\pi}{2}$ אסימפטוטות אנכיות לציר x של הפונקציה

$f(x) = 4x - tg\,x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (5) שרטט את גרף הפונקציה.

פתרון



נמצא את נקודת החיתוך עם ציר y:

$$f(0) = 0 - tg\,0 = 0$$

ג. הוכח שלכל x בתחום $0 \le x \le \frac{11}{25}\pi$ מתקיים: $4x \ge tg\, x$.

פתרון

נבחן את הפונקציה:

$$f(x) = 4x - tg\, x$$

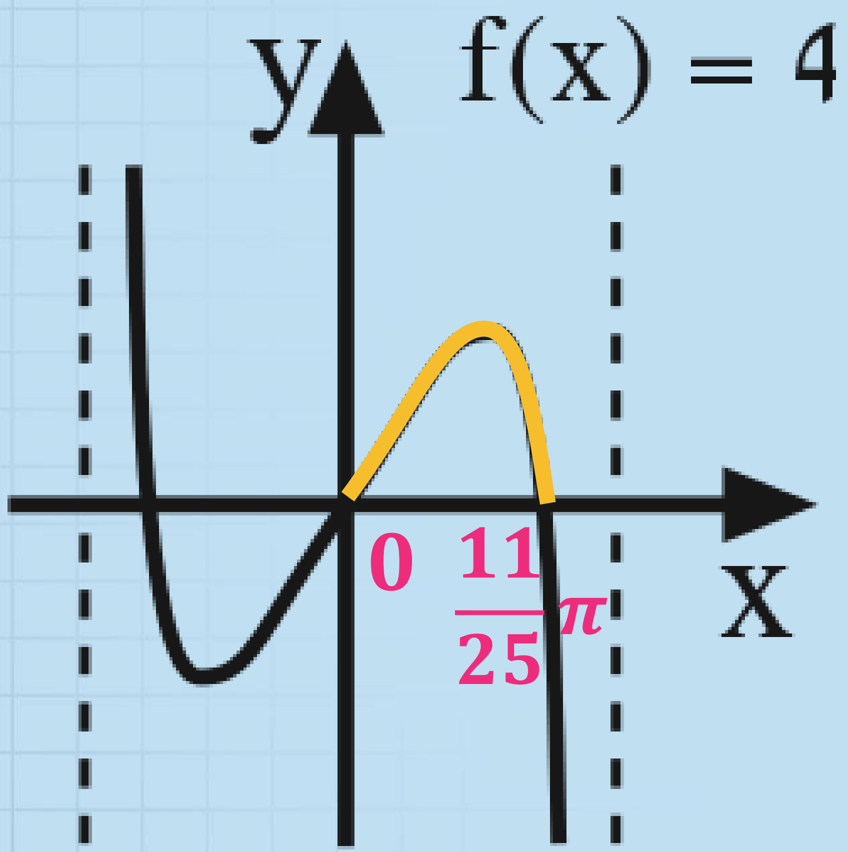
למעשה, עלינו להוכיח שבתחום המבוקש $f(x) \ge 0$

$$f(0) = 0 - tg\, 0 = 0$$

$$f\left(\frac{11}{25}\pi\right) = 4 \cdot \frac{11}{25}\pi - tg\frac{11}{25}\pi = 0$$

ג. הוכח שלכל x בתחום $0 \le x \le \frac{11}{25}\pi$ מתקיים: $4x \ge tg\,x$.

פתרון



עפ"י גרף הפונקציה,
בתחום זה היא מעל הציר:

בתחום המבוקש $f(x) \ge 0$

$$4x - tg\,x \ge 0$$

$$\mathbf{4x \ge tg\,x}$$

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. ידוע שהאסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ הן כמו של הפונקציה $f(x)$. נתון גם: $g(0) = 0$. שרטט סקיצה (בצורה כללית) של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x
יהיו שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$

עפ"י סעיף ג': $f(0) = f\left(\frac{11}{25}\pi\right) = 0$

נמצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$
עם החלק שלילי של ציר x

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. ידוע
שהאסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ הן כמו של הפונקציה $f(x)$. נתון גם:
$g(0)=0$. שרטט סקיצה (בצורה כללית) של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, המקיימת $f(-x)=-f(x)$

$$f(-x)=4\cdot(-x)-tg(-x)=-4x+tg\,x=-f(x)$$

$$f\left(\frac{11}{25}\pi\right)=0 \quad\Rightarrow\quad f\left(-\frac{11}{25}\pi\right)=-0=0$$

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. ידוע שהאסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ הן כמו של הפונקציה $f(x)$. נתון גם: $g(0) = 0$. שרטט סקיצה (בצורה כללית) של גרף הפונקציה $g(x)$.

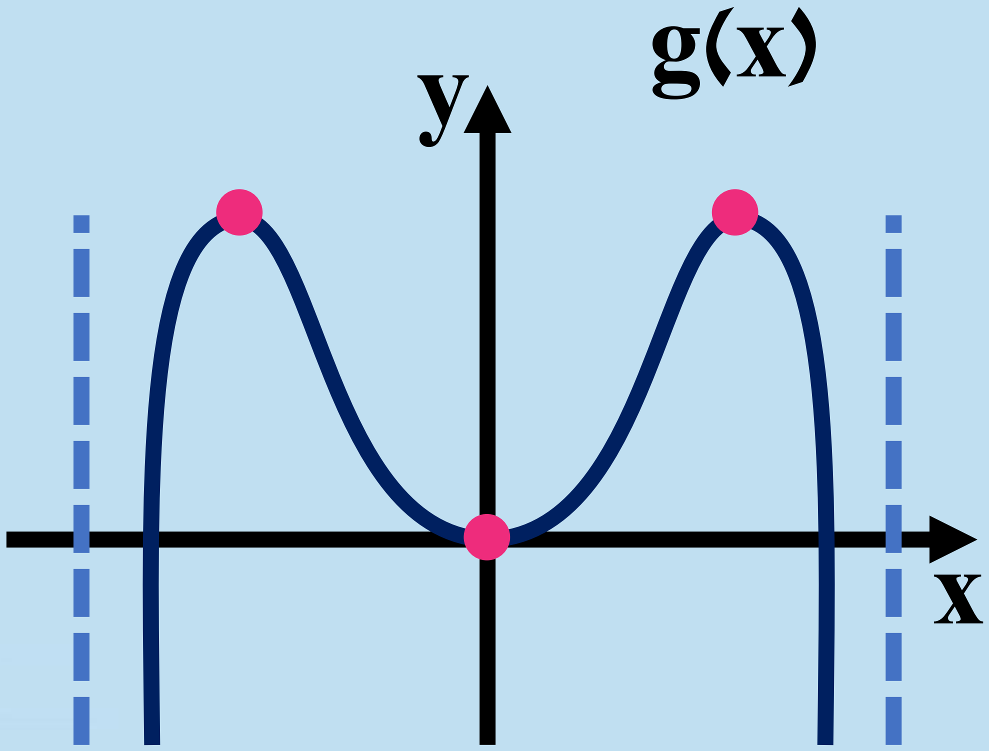
פתרון

לפונקציה $g(x)$ שלוש נקודות קיצון פנימיות עבור $x = -\frac{11}{25}\pi\ ,0\ ,\frac{11}{25}\pi$

תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ יקבעו עפ"י
תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציה $f(x)$

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. ידוע שהאסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ הן כמו של הפונקציה $f(x)$. נתון גם: $g(0) = 0$. שרטט סקיצה (בצורה כללית) של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון



בהצלחה