פתרון תרגיל

חקירת פונקציה – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 228, ת. 20

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

חקור את הפונקציות הבאות בתחום הרשום לידן בהתאם לסעיפים הבאים ומצא:

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון.

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x.

ו) שרטט את גרף הפונקציה.

20) $y = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$, $0 \le x \le \pi$

20) $y=\frac{1}{\sin x\cos x}$, $0\le x\le\pi$ א) תחום הגדרה.

פתרון

באמצעות הזהות: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$y=\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}}=\frac{2}{\sin 2x}$$

$y = \frac{2}{\sin 2x}$ $0 \le x \le \pi$ א) תחום הגדרה.

פתרון

תחום הגדרה: $\sin 2x \neq 0$

$$2x \neq \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{2}k$$

פתרונות בתחום: $x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$y = \frac{2}{sin\,2x} \qquad 0 < x < \pi$ ב) נקודות קיצון

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$y'(x) = -\frac{2}{sin^2 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = \frac{-4\cos 2x}{sin^2 2x} = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$y = \frac{2}{\sin 2x}$ $\quad 0 < x < \pi$ **ב)** נקודות קיצון.

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

פתרונות בתחום: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

$y=\dfrac{2}{sin\,2x}$ $\quad 0<x<\pi$ ב) נקודות קיצון

פתרון

$$x=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $y''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ"י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(-4\cos 2x)'=-4\cdot-\sin 2x\cdot 2=8\sin 2x$$

$y = \dfrac{2}{\sin 2x} \qquad 0 < x < \pi$ ב) נקודות קיצון

פתרון

$$(-4\cos 2x)' = 8\sin 2x$$

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad 8\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} > 0$$

עבור $x = \frac{\pi}{4}$ לפונקציה נקודת מינימום

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}} = 2$$

$\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ נקודת מינימום

$y = \frac{2}{\sin 2x}$ $\quad 0 < x < \pi$ **ב)** נקודות קיצון

פתרון

$$(-4\cos 2x)' = 8\sin 2x$$

$$x = \frac{3}{4}\pi \qquad 8\sin 2\cdot\frac{3}{4}\pi < 0$$

עבור $x = \frac{3}{4}\pi$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{2}{\sin 2\cdot\frac{3}{4}\pi} = -2$$

נקודת מקסימום $\left(\frac{3}{4}\pi, -2\right)$

$y = \frac{2}{\sin 2x} \qquad 0 < x < \pi$

ב) נקודות קיצון.

פתרון

הפונקציה מוגדרת בתחום פתוח $0 < x < \pi$

ולכן אין נקודות קיצון קצה

$y = \frac{2}{\sin 2x}$ $0 < x < \pi$ ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

עד נקודת המינימום, $x = \frac{\pi}{4}$, הפונקציה יורדת ולאחריה היא עולה.

הפונקציה **אינה מוגדרת** עבור $x = \frac{\pi}{2}$

עד נקודת המקסימום, $x = \frac{3}{4}\pi$, הפונקציה עולה ולאחריה היא יורדת.

נשלב גם את תחום ההגדרה של הפונקציה $0 < x < \pi$

$y = \frac{2}{\sin 2x}$ $\quad 0 < x < \pi$ ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

תחום עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ **או** $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{2}$

תחום ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ **או** $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$

$y = \dfrac{2}{\sin 2x} \quad 0 < x < \pi$ ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$, אין חיתוך עם ציר y

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 0$$

אין פתרון, אין חיתוך עם ציר x

$y = \frac{2}{\sin 2x}$ $\quad 0 < x < \pi$ **ה)** אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x.

פתרון

הערכים $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ מאפסים את המכנה ולא את המונה

(השווה ל- 2 לכל x)

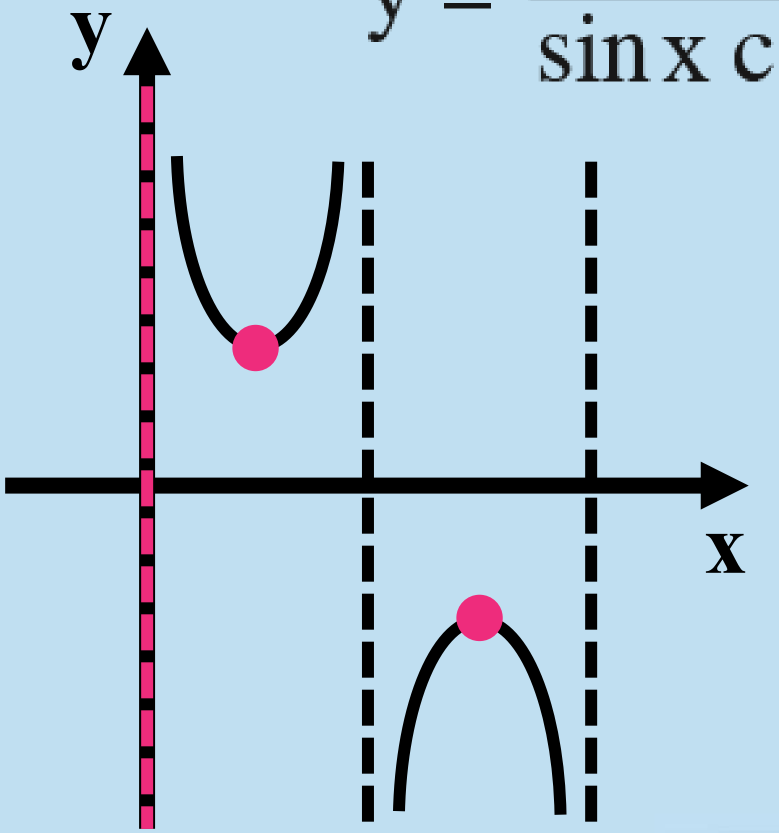
$\Downarrow$

הישרים $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ אסימפטוטות אנכיות לציר x של הפונקציה

$y = \frac{2}{sin\,2x}$ $\quad 0 < x < \pi$ ו) שרטט את גרף הפונקציה.

פתרון

$$y = \frac{1}{\sin x \cos x}$$



בהצלחה