תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 226–227, דוגמה

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא:

חקור את הפונקציה $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$ עפ"י הסעיפים הבאים ומצא את:

א. תחום ההגדרה.

ב. נקודות הקיצון.

ג. תחומי העלייה והירידה.

ד. נקודות החיתוך עם הצירים.

ה. שרטט את גרף הפונקציה.

ו. היעזר בגרף של הפונקציה $f(x)$ ושרטט בתחום $0 \le x \le \pi$, בצורה כללית, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם נתון שלפונקציה $f(x)$ יש בתחום הנ"ל בין כל שתי נקודות קיצון פנימיות נקודת פיתול אחת בדיוק.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$

א. תחום ההגדרה.

הפונקציה מוגדרת לכל x ולכן גם לכל x בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. נקודות הקיצון.

נקודות הקיצון הפנימיות – נגזור ונשווה לאפס,

$f'(x) = 2\sin x \cos x - \cos x = 0$,

תרגיל לדוגמה

$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$

$f'(x) = 2\sin x \cos x - \cos x = 0$,

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ או $\sin x = \frac{1}{2}$.

הפתרונות בתחום $0 \le x \le 2\pi$ הם: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$

$f'' = 2\cos 2x + \sin x$.

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5 > 0$,

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$,

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 1.5 > 0$.

$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3 < 0$,

תרגיל לדוגמה

$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$

לכן נקודות המקסימום הפנימיות הן: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\right)$ ונקודות המינימום הפנימיות הן: $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{4}\right)$.

נקודות הקיצון בקצוות – נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה: $x = 0$ ו-$x = 2\pi$
ונסתמך על נקודות הקיצון הפנימיות. נקבל: $(0, 0)$ מקסימום, $(2\pi, 0)$ מינימום.

תרגיל לדוגמה

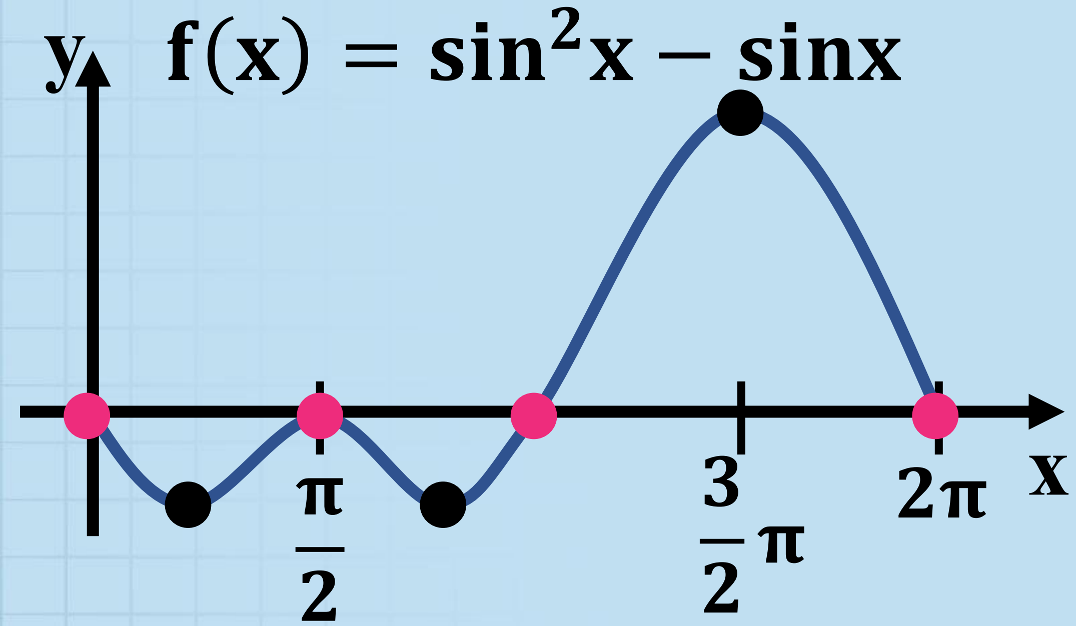
$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$

ג. **תחומי העלייה והירידה** – עפ"י נקודות הקיצון הפונקציה עולה בתחום:
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ ויורדת בתחום: $0 < x < \frac{\pi}{6}$ או $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$
או $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$.

ד. **נקודות החיתוך עם הצירים** –
חיתוך עם ציר ה-x: ע"י פתרון המשוואה $\sin^2 x - \sin x = 0$ נקבל $\sin x = 0$ או
$\sin x = 1$. מכאן שנקודות החיתוך הן: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$.
חיתוך עם ציר ה-y: $(0,0)$.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = \sin^2 x - \sin x$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$



ה. **התיאור הגרפי** – ניתן להיעזר בטבלה.

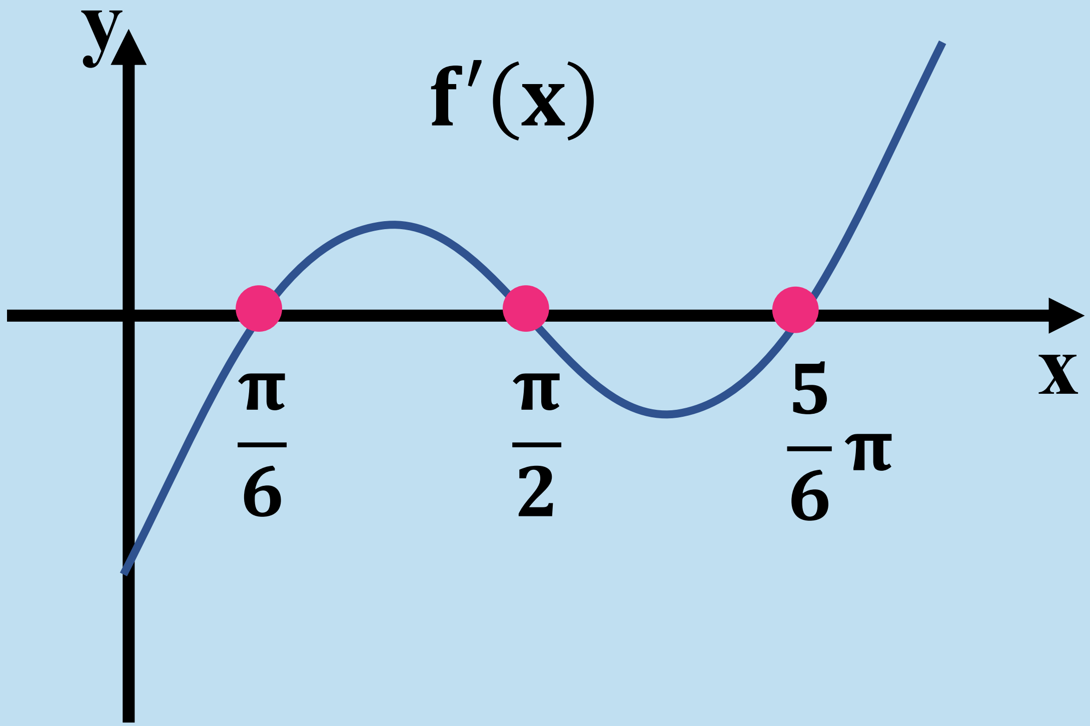
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	0
$f'(x)$	$-$	0	0	0	$+$	0	$-$
עלייה ירידה	↘	↗	↘		↗	↘	

תרגיל לדוגמה

ו. בתחום $0 \le x \le \pi$ יש לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות מינימום פנימיות בנקודות $x = \frac{\pi}{6}$ ו-$x = \frac{5}{6}\pi$ ונקודת מקסימום פנימית בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$. בנקודות אלה הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x. בכל נקודת מינימום של $f(x)$ הפונקציה $f'(x)$

עוברת משליליות לחיוביות ובכל נקודת מקסימום של $f(x)$ הפונקציה $f'(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות. עפ"י הנתון לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בתחום הנ"ל ולכן לפונקציה $f'(x)$ יש שתי נקודות קיצון פנימיות בתחום הנ"ל.

תרגיל לדוגמה



בהצלחה