פתרון תרגיל

אסימפטוטות אנכיות – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 225, ת. 20

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

20) נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. מצא בתחום הנ"ל את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון בתחום הנ"ל.

ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנ"ל. הוכח את תשובתך.

(**הדרכה**: ניתן לראות הדרכה בתשובה לתרגיל).

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. מצא בתחום הנ״ל את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

תחום הגדרה:

$$\sin x \neq -1$$

$$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

פתרונות בתחום:

$$\boldsymbol{x \neq \frac{3}{2}\pi}$$

$$\boldsymbol{0 \le x < \frac{3}{2}\pi} \quad \textbf{או} \quad \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi}$$

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון בתחום הנ״ל.

פתרון

עלינו להראות שאין ערכי x שמאפסים את הנגזרת הראשונה

$$f'(x)=\frac{-\sin x\,(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

ב. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון בתחום הנ"ל.

פתרון

$$f'(x) = \frac{-(1+sin\,x)}{(1+sin\,x)^2}$$

עפ"י תחום ההגדרה של הפונקציה, המונה שונה מ-0

אין ערכי x שמאפסים את הנגזרת הראשונה
ומכאן שלפונקציה אין נקודות קיצון בתחום

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנ"ל. הוכח את תשובתך.

פתרון

נמצא ערכי x שמאפסים את המכנה בתחום

עפ"י סעיף א':

$$x = \frac{3}{2}\pi$$

ערך זה מאפס **גם** את המונה ולכן עלינו לבצע בדיקה נוספת:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנ"ל. הוכח את תשובתך.

פתרון

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנ"ל. הוכח את תשובתך.

פתרון

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

הערך $x = \frac{3}{2}\pi$ מאפס את המכנה:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

הערך $x = \frac{3}{2}\pi$ **אינו** מאפס את המונה:

$$1 - \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2$$

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ ונתון התחום $0 \le x \le 2\pi$.

ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנ"ל. הוכח את תשובתך.

פתרון

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$\Downarrow$$

הישר $x=\frac{3}{2}\pi$ אסימפטוטה אנכית לפונקציה

בהצלחה