# פתרון תרגיל

## נקודות קיצון, כולל בקצוות – פונקציות טריגונומטריות

## מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

**581 , עמ' 222, ת. 11**

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

# השאלה

**11)** נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. מצא את התחום הגדול ביותר שהוא חלק מהתחום שנתון ובו מוגדרת הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום שמצאת בסעיף א'.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = af(x)+b$, $a > 0$. נתון ששיעור ה-$y$ של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא 7 ושיעור ה-$y$ של נקודת המינימום שלה הוא 4. מצא את $a$ ו-$b$.

ד. הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום שמצאת בסעיף א' ומקיימת $h(x) = (f(x))^2$. הישר $x = k$ הוא ישר **המאונך לציר ה-$x$** שעובר בתוך התחום הנ"ל וחותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$h(x)$.

(I) קבע מה נכון: **(1)** $f(k) \le h(k)$ או **(2)** $f(k) \ge h(k)$. נמק את תשובתך.

(II) לאילו ערכי $k$ מתקיים שוויון? נמק.

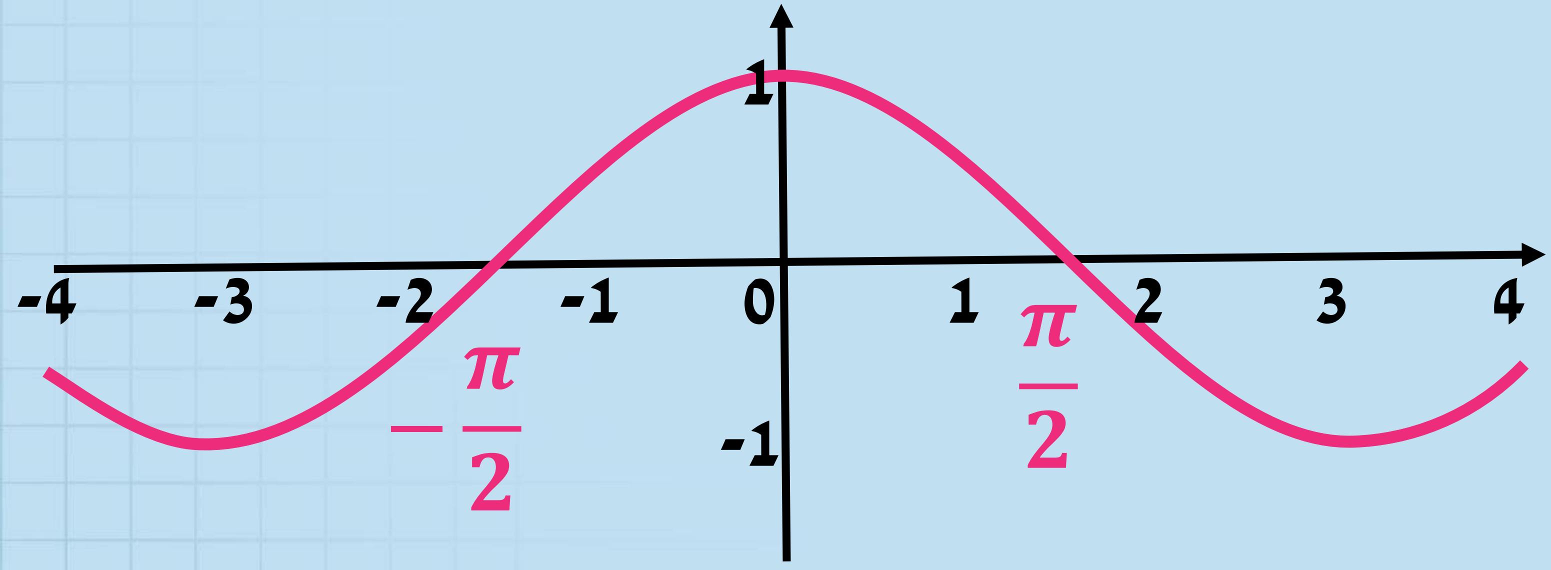
**11)** נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. מצא את התחום הגדול ביותר שהוא חלק מהתחום שנתון ובו מוגדרת הפונקציה.

# פתרון

**תחום הגדרה:** $\cos x \ge 0$

נבחן את גרף הפונקציה בתחום הנתון:




$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום שמצאת בסעיף א'.

# פתרון

**נדרוש:** $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}=0$$

$$\sin x=0$$

$$x=\pi k$$

פתרונות בתחום: $x=0$

**11)** נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום שמצאת בסעיף א'.

# פתרון

$$x = 0$$

**נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$**

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ"י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(-\sin x)' = -\cos x$$

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום שמצאת בסעיף א'.

# פתרון

$$(-\sin x)' = -\cos x$$

$x = 0$ $\quad\quad$ $-\cos 0 < 0$

עבור $x=0$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$f(0)=\sqrt{\cos 0}=1$$

**$(0,1)$ נקודת מקסימום**

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום שמצאת בסעיף א'.

# פתרון

**נמצא את ערכי הפונקציה בקצות תחום ההגדרה:**

$$x=-\frac{\pi}{2}:\ \ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$$

$$x=\frac{\pi}{2}:\ \ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad \left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

נאבחן את סוג הקיצון עפ"י תחומי עליה וירידה

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\cos x}$ ונתון התחום $-\pi \le x \le \pi$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום שמצאת בסעיף א'.

# פתרון

**נקודת הקצה $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ היא קיצון מסוג מינימום**

**(החל ממנה הפונקציה עולה)**

**נקודת הקצה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ היא קיצון מסוג מינימום**

**(עד אליה הפונקציה יורדת)**

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = af(x)+b$, $a > 0$. נתון ששיעור ה-$y$ של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא 7 ושיעור ה-$y$ של נקודת המינימום שלה הוא 4. מצא את $a$ ו-$b$.

# פתרון

לשתי הפונקציות אותו תחום ההגדרה

$$g'(x) = af'(x)$$

שיעורי ה- $x$ של נקודות הקיצון וסוגן זהה

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = af(x) + b$, $a > 0$. נתון ששיעור ה-$y$ של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא 7 ושיעור ה-$y$ של נקודת המינימום שלה הוא 4. מצא את $a$ ו-$b$.

# פתרון

**עבור $x = 0$ לפונקציה נקודת מקסימום**

$$g(0) = 7$$

$$af(0) + b = 7$$

$$a \cdot 1 + b = 7$$

$$\boldsymbol{a + b = 7}$$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = af(x) + b$, $a > 0$. נתון ששיעור ה-$y$ של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא 7 ושיעור ה-$y$ של נקודת המינימום שלה הוא 4. מצא את $a$ ו-$b$.

# פתרון

**עבור $x = \frac{\pi}{2}$ לפונקציה נקודת מינימום**

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$af\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = 4$$

$$a \cdot 0 + b = 4$$

$$\boldsymbol{b = 4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 3}$$

ד. הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום שמצאת בסעיף א' ומקיימת $h(x) = (f(x))^2$. הישר $x = k$ הוא ישר **המאונך לציר ה-x** שעובר בתוך התחום הנ"ל וחותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$h(x)$.

# פתרון

(I) קבע מה נכון: (1) $f(k) \le h(k)$ או (2) $f(k) \ge h(k)$. נמק את תשובתך.

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad h(x) = \cos x \qquad f(x) = \sqrt{\cos x}$$

בתחום הנ"ל פונקציית הקוסינוס אי שלילית.
מכיוון שבתחום הפונקציה חסומה בין 1 ל- 0, אז **פעולת השורש תגדיל** את הערך שהיא מחזירה, אלא אם כן ערך זה הוא 1 או 0 ואז הן יהיו שוות.
כלומר, הפונקציה $h(x)$ תחזיר ערכים קטנים יותר לעומת $f(x)$ או שווים לה

ד. הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום שמצאת בסעיף א׳ ומקיימת $h(x) = (f(x))^2$. הישר $x = k$ הוא ישר **המאונך לציר ה-x** שעובר בתוך התחום הנ״ל וחותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$h(x)$.

# פתרון

(II) לאילו ערכי k מתקיים שוויון? נמק.

שיוויון יתקיים עבור ערכי $k$ שיחזירו את הערך 1 או 0

$$k = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$$

# בהצלחה