תרגיל לדוגמה

חילוק מספרים מרוכבים הכתובים בצורה קוטבית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 37–38, דוגמה ב'–ג'

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

תרגיל לדוגמה

נביא עכשיו דוגמא שממנה נסיק מסקנה לגבי חילוק של שני מספרים מרוכבים הכתובים בצורה הקוטבית.

דוגמא ב׳:

נתון: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. הוכח: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

פתרון:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

נכפול את הביטוי ב״צמוד״ של הביטוי $\cos\theta + i\sin\theta$ חלקי עצמו

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

נתון: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. הוכח: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

נשתמש בזהות:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\theta = \cos(-\theta)$$

$$\sin\theta = -\sin(-\theta)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

תרגיל לדוגמה

מדוגמא זו ניתן להסיק את המסקנה הבאה:

אם מחלקים שני מספרים מרוכבים הכתובים בצורה קוטבית אז הערך המוחלט של המנה שווה למנת הערכים המוחלטים והארגומנט של המנה שווה להפרש הארגומנטים.

$$\boxed{r_1 \operatorname{cis}\theta_1 : r_2 \operatorname{cis}\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)}$$

תרגיל לדוגמה

דוגמא ג':

בצע את החילוק $6\,\text{cis}\,200^\circ : 2\,\text{cis}\,50^\circ$.

$$r_1 \,\text{cis}\,\theta_1 : r_2 \,\text{cis}\,\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

פתרון:

$$6\,\text{cis}\,200^\circ : 2\,\text{cis}\,50^\circ = \frac{6}{2}\,\text{cis}\left(200^\circ - 50^\circ\right) = 3\,\text{cis}\,150^\circ$$

תרגיל לדוגמה

המשמעות הגיאומטרית של חילוק מספרים מרוכבים

בדומה למכפלה של שני מספרים מרוכבים גם כאן ניתן לייצג בצורה גרפית את המספר שהוא החילוק של שני מספרים מרוכבים.

לדוגמא:

נתונים המספרים $z_1 = 1+3i$, $z_2 = -2+4i$.

ע"י חילוק רגיל נקבל:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-2+4i}{1+3i} \quad / \cdot \frac{1-3i}{1-3i}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(-2+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{10+10i}{1+9} = 1+i$$

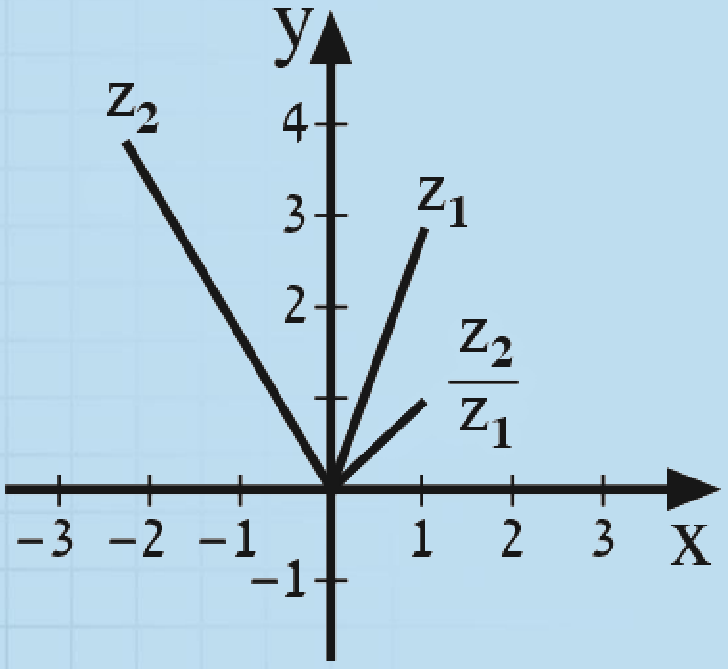
תרגיל לדוגמה

המשמעות הגיאומטרית של חילוק מספרים מרוכבים

$z_1 = 1+3i$, $z_2 = -2+4i$.

$$\frac{z_2}{z_1} = 1+i$$

נמקם את המספרים z_2, z_1 במערכת צירים:



נוסיף את המספר $\frac{z_2}{z_1}$

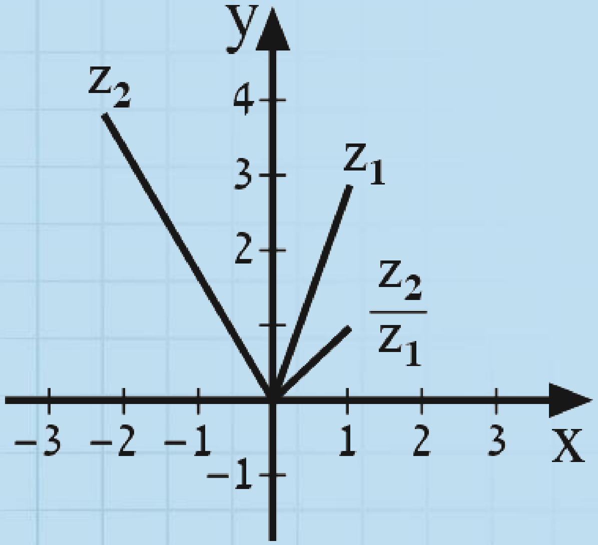
תרגיל לדוגמה

$z_1 = 1+3i$, $z_2 = -2+4i$.

$$\frac{z_2}{z_1} = 1+i$$

המשמעות הגיאומטרית של חילוק מספרים מרוכבים

נעבור להצגות קוטביות ונראה שההצגה שקיבלנו לגבי החילוק אכן מתקיימת:



$$z_1 = \sqrt{10}cis(71.56°)$$

$$z_2 = \sqrt{20}cis(116.56°)$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}cis(45°)$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}cis(116.56° - 71.56°)$$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{tg\theta = \frac{y}{x}}$$

בהצלחה