פתרון תרגיל

בעיות שונות – מספרים מרוכבים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 70, ת. 26

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

26) z הוא מספר מרוכב המקיים: (1) $z = r\,\text{cis}\,\theta$, (2) $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$.

א. הוכח: $|z| = 1$.

ב. הוכח: $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ לכל n טבעי.

z הוא מספר מרוכב המקיים: (1) $z = r\text{cis}\theta$, (2) $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$.

א. הוכח: $|z| = 1$.

פתרון

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$$

$$z + \frac{1}{z} - 2\cos\theta = 0$$

$$z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

z הוא מספר מרוכב המקיים: (1) $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$, (2) $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$.

א. הוכח: $|z| = 1$.

פתרון

$$z_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= \frac{2\cos\theta \pm 2\sqrt{-1(1-\cos^2\theta)}}{2}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$= \frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2}$$

$$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{cis}\theta$$

$$z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = \mathrm{cis}(-\theta)$$

z הוא מספר מרוכב המקיים: (1) $z = r\text{cis}\theta$, (2) $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$.
א. הוכח: $|z| = 1$.

פתרון

$z_1 = \text{cis}\theta \qquad z_2 = \text{cis}(-\theta) \qquad z = r\text{cis}\theta$

$|z| = r = 1$

מ.ש.ל

ב. הוכח: $z^{n}+\frac{1}{z^{n}}=2\cos n\theta$ לכל n טבעי.

פתרון

$$z=\operatorname{cis}\theta$$

$$(r\operatorname{cis}\theta)^{n}=r^{n}\operatorname{cis}n\theta$$

$$z^{n}+\frac{1}{z^{n}}=(\operatorname{cis}\theta)^{n}+\frac{1}{(\operatorname{cis}\theta)^{n}}$$

$$\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$$

$$=\operatorname{cis}n\theta+\frac{\operatorname{cis}0}{\operatorname{cis}n\theta}=\operatorname{cis}n\theta+\operatorname{cis}(-n\theta)$$

$$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

ב. הוכח: $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ לכל n טבעי.

פתרון

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$= 2\cos n\theta$$ מ.ש.ל

בהצלחה