פתרון תרגיל

השורשים מסדר n של מספר מרוכב

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 66, ת. 33

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

33) א. פתור את המשוואה $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$.

ב. z_1 הוא הפתרון ברביע הראשון, z_2 הוא הפתרון ברביע השני ו-z_5 הוא הפתרון ברביע הרביעי. נסמן: $A = \frac{z_5}{z_2}$, $B = z_1^4$. הנקודה O היא ראשית הצירים.

חשב את הזווית בין הישרים AO ו-OB.

א. פתור את המשוואה $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$.

פתרון

$$z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i \quad \rightarrow \quad z^5 = 32\text{cis}240°$$

$$x + y \cdot i \rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(-16)^2 + \left(-16\sqrt{3}\right)^2} = 32$$

רביע שלישי

$$\tan\theta = \frac{-16\sqrt{3}}{-16} \rightarrow \theta = 60° + 180°k = 240°$$

א. פתור את המשוואה $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$.

פתרון

$$z^5 = 32\text{cis}240°$$

$$z^n = r\text{cis}\theta \quad \rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{r}\text{cis}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)$$

$$k = 0,1,2 \dots, n-1$$

$$z_k = \sqrt[5]{32}\text{cis}\left(\frac{240° + 360°k}{5}\right) = 2\text{cis}(48° + 72°k)$$

$$k = 0,1, \dots, 4$$

א. פתור את המשוואה $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$.

פתרון

$$z_k = 2\text{cis}(48° + 72°k)$$

$$k = 0,1, \dots, 4$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= 2\text{cis}(48°) \\ z_2 &= 2\text{cis}(120°) \\ z_3 &= 2\text{cis}(192°) \\ z_4 &= 2\text{cis}(264°) \\ z_5 &= 2\text{cis}(336°) \end{aligned}}$$

ב. z_1 הוא הפתרון ברביע הראשון, z_2 הוא הפתרון ברביע השני ו-z_5 הוא הפתרון ברביע הרביעי.

נסמן: $A = \frac{z_5}{z_2}$, $B = z_1^4$. הנקודה O היא ראשית הצירים. חשב את הזוית בין הישרים AO ו-OB.

פתרון

$$z_1 = 2\text{cis}(48°)$$
$$z_2 = 2\text{cis}(120°)$$
$$z_5 = 2\text{cis}(336°)$$

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$(r\text{cis}\theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

$$A = \frac{z_5}{z_2} = \frac{2\text{cis}(336°)}{2\text{cis}(120°)} = \frac{2}{2}\text{cis}(336° - 120°) = \text{cis}(216°)$$

$$B = {z_1}^4 = \left(2\text{cis}(48°)\right)^4 = 2^4\text{cis}(4 \cdot 48°) = 16\text{cis}(192°)$$

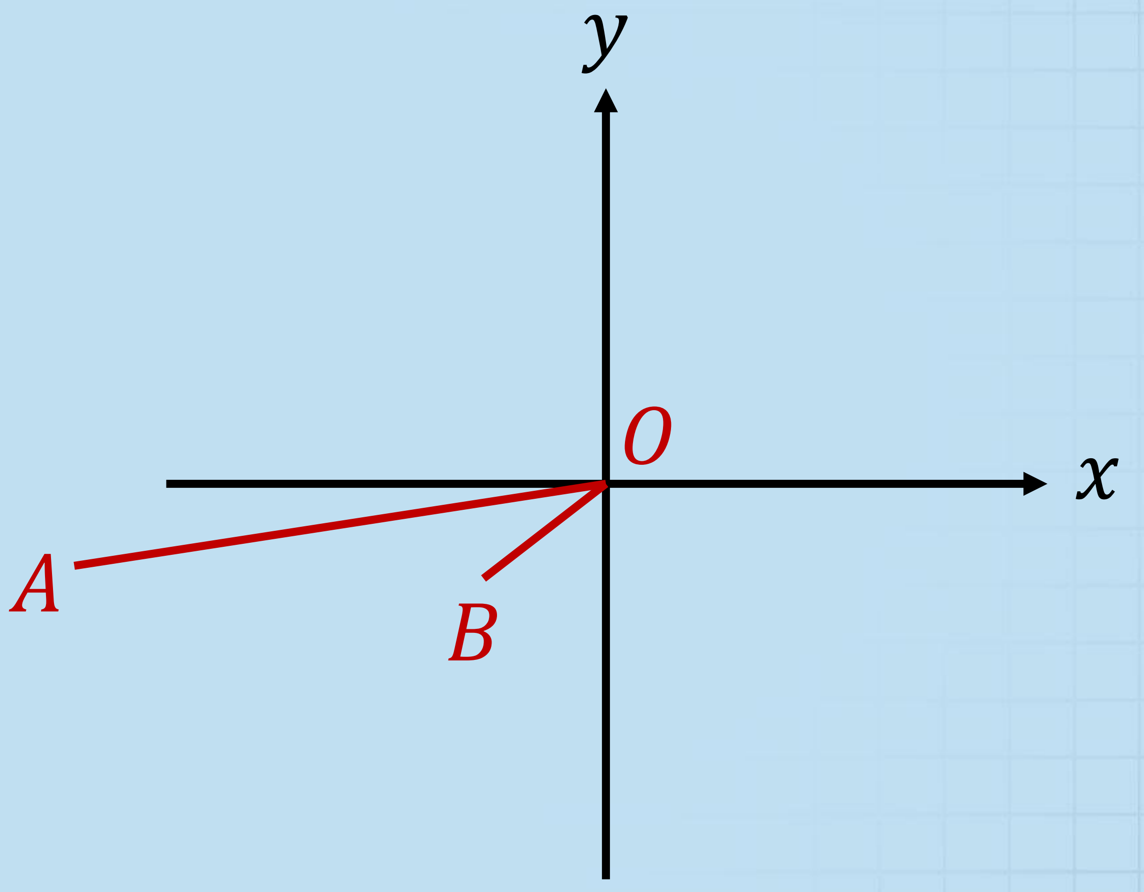
ב. z_1 הוא הפתרון ברביע הראשון, z_2 הוא הפתרון ברביע השני ו-z_5 הוא הפתרון ברביע הרביעי.

נסמן: $A = \frac{z_5}{z_2}$, $B = z_1^4$. הנקודה O היא ראשית הצירים. חשב את הזווית בין הישרים AO ו-OB.

פתרון

$$A: \quad {z_1}^4 = 16\text{cis}(192°)$$

$$B: \quad \frac{z_5}{z_2} = \text{cis}(216°)$$



$$\boxed{\sphericalangle AOB = 216° - 192° = 24°}$$

בהצלחה