פתרון תרגיל

השורשים מסדר n של מספר מרוכב

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 66, ת. 27

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

27) א. הבע בעזרת k את פתרונות המשוואה $(iz+k)^2 = -2+2\sqrt{3}\,i$.

ב. נתון שהפתרונות הנ"ל נמצאים על המקום הגיאומטרי $|z+i| = 2$. מצא את k ואת הפתרונות.

ג. מצא את המקום הגיאומטרי שבסעיף ב'. מה ניתן לומר על שני הפתרונות הנ"ל בהתייחס למקום הגיאומטרי? נמק.

א. הבע בעזרת k את פתרונות המשוואה $(iz+k)^2 = -2+2\sqrt{3}i$.

פתרון

$$-2+2\sqrt{3}i = 4\text{cis}120°$$

$$x+y\cdot i \rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

רביע שני

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} \rightarrow \theta = -60° + 180k = 120°$$

א. הבע בעזרת k את פתרונות המשוואה $(iz+k)^2 = -2+2\sqrt{3}i$.

פתרון

$$(iz+k)^2 = 4\text{cis}120°$$

$$w = iz + k \quad \rightarrow z = \frac{w-k}{i} = \frac{w-k}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = -i(w-k)$$

$$w^2 = 4\text{cis}120°$$

$$w_k = \sqrt{4}\text{cis}\frac{120° + 360°k}{2}$$

$$k = 0{,}1$$

$$w_0 = 2\text{cis}60° \quad = 1+\sqrt{3}i$$

$$w_1 = 2\text{cis}240° = -1-\sqrt{3}i$$

$$z_0 = -i\left(1+\sqrt{3}i-k\right)$$

$$z_1 = -i\left(-1-\sqrt{3}i-k\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3}+(k-1)i \\ z_1 &= -\sqrt{3}+(k+1)i \end{aligned}}$$

ב. נתון שהפתרונות הנ"ל נמצאים על המקום הגיאומטרי $|z+i| = 2$. מצא את k
ואת הפתרונות.

פתרון

$$|z+i| = 2$$

$$\left|-\sqrt{3}+(k+1)i+i\right| = 2$$

וגם

$$\left|\sqrt{3}+(k-1)i+i\right| = 2$$

$$\left|-\sqrt{3}+(k+2)i\right| = 2$$

$$\left|\sqrt{3}+ki\right| = 2$$

$$\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(k+2)^2} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{3}^2+k^2} = 2$$

$$k^2+4k+7 = 4 \rightarrow k = -1, \cancel{-3}$$

$$k^2+3 = 4 \rightarrow k = -1, \cancel{1}$$

ב. נתון שהפתרונות הנ"ל נמצאים על המקום הגיאומטרי $|z+i| = 2$. מצא את k ואת הפתרונות.

פתרון

$$z_0 = \sqrt{3} + (k-1)i$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + (k+1)i$$

$$\boxed{\begin{aligned} k &= -1 \\ z_0 &= \sqrt{3} - 2i \\ z_1 &= -\sqrt{3} \end{aligned}}$$

ג. מצא את המקום הגיאומטרי שבסעיף ב'. מה ניתן לומר על שני הפתרונות הנ"ל בהתייחס למקום הגיאומטרי? נמק.

פתרון

$$|z+i|=2$$

$$|x+yi+i|=2$$

$$|x+(y+1)i|=2$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$$

$$x^2+(y+1)^2=4$$

מעגל שרדיוסו 2 ומרכזו בנקודה $(0,-1)$.

ג. מצא את המקום הגיאומטרי שבסעיף ב׳. מה ניתן לומר על שני הפתרונות הנ״ל בהתייחס למקום הגיאומטרי? נמק.

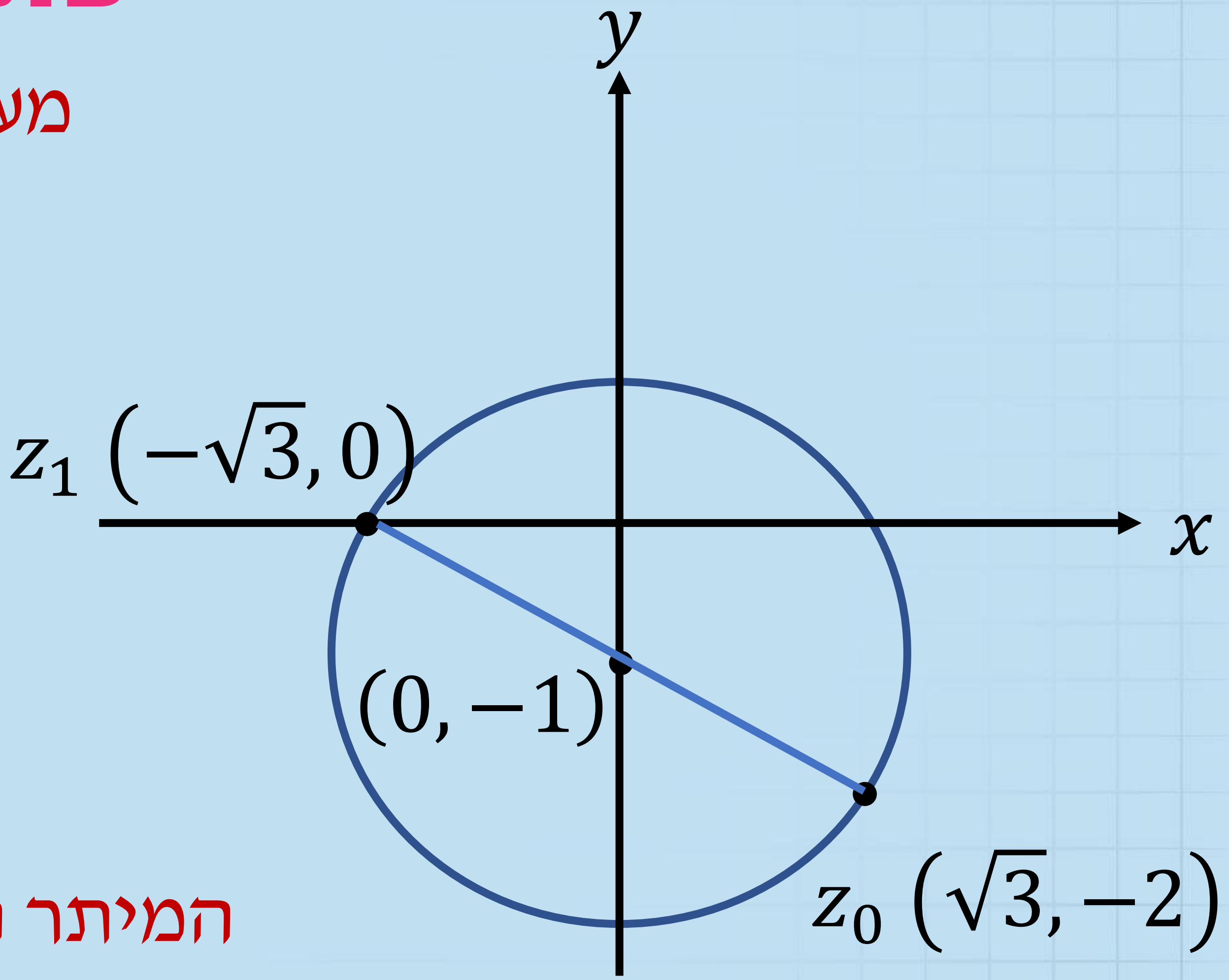
פתרון

מעגל שרדיוסו 2 ומרכזו בנקודה $(0,-1)$.

$$x^2+(y+1)^2=4$$

נוסחת אמצע קטע:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=0 \qquad \frac{-2+0}{2}=-1$$



המיתר המחבר את הפתרונות הוא קוטר במעגל

בהצלחה