פתרון תרגיל

השורשים מסדר n של מספר מרוכב

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 65, ת. 26

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

26) פתרונות המשוואה $(z+i)^2 = 2+2\sqrt{3}i$ הם z_1 ו-z_2.

א. מצא את z_1 ו-z_2 אם נתון $|z_2| < |z_1|$.

ב. הוכח: $(z_1^2 - z_2^2)^{3n}$ הוא מספר ממשי לכל n טבעי.

ג. רשום משוואה ריבועית שהשורשים שלה הם z_1 ו-z_2.

פתרונות המשוואה $(z+i)^2 = 2+2\sqrt{3}i$ הם z_1 ו-z_2.

א. מצא את z_1 ו-z_2 אם נתון $|z_2| < |z_1|$.

פתרון

$$2+2\sqrt{3}i = 4\text{cis}60°$$

$$x+y\cdot i \rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r=\sqrt{(2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

רביע ראשון

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 60° + 180k = 60°$$

פתרונות המשוואה $(z+i)^2 = 2+2\sqrt{3}i$ הם z_1 ו-z_2.

א. מצא את z_1 ו-z_2 אם נתון $|z_2| < |z_1|$.

פתרון

$$(z+i)^2 = 4\text{cis}60°$$

$$w = z+i \to z = w-i$$

$$w^2 = 4\text{cis}60°$$

$$w_k = \sqrt{4}\text{cis}\frac{60° + 360°k}{2}$$

$$k = 0,1$$

$$w_0 = 2\text{cis}30° = \sqrt{3}+i$$

$$w_1 = 2\text{cis}210° = -\sqrt{3}-i$$

$$w_0 - i = \boxed{\sqrt{3} = z_1}$$

$$|w_0 - i| = \sqrt{3}$$

$$w_1 - i = \boxed{-\sqrt{3} - 2i = z_2}$$

$$|w_1 - i| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{7}$$

ב. הוכח: $(z_1^2 - z_2^2)^{3n}$ הוא מספר ממשי לכל n טבעי.

פתרון

$$z_1 = \sqrt{3} \qquad z_2 = -\sqrt{3} - 2i$$

$$({z_1}^2 - {z_2}^2)^{3n} = \left(\sqrt{3}^2 - \left(-\sqrt{3} - 2i\right)^2\right)^{3n}$$

$$= \left(3 - 3 - 4\sqrt{3}i + 4\right)^{3n} = \left(4 - 4\sqrt{3}i\right)^{3n}$$

ב. הוכח: $(z_1^2 - z_2^2)^{3n}$ הוא מספר ממשי לכל n טבעי.

פתרון

$$4 - 4\sqrt{3}i = 8\text{cis}(-60°)$$

$$x + y \cdot i \rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(4)^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

רביע רביעי

$$\tan\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{4} \rightarrow \theta = -60° + 180k = -60°$$

ב. הוכח: $(z_1^2 - z_2^2)^{3n}$ הוא מספר ממשי לכל n טבעי.

פתרון

$$\left(4-4\sqrt{3}i\right)^{3n} = \left(8\text{cis}(-60°)\right)^{3n}$$

$(r\text{cis}\theta)^n = r^n \text{cis}\, n\theta$

$$= 8^{3n}\text{cis}(-180°n)$$

$$= 8^{3n}\cos(-180°n) + i8^{3n}\sin(-180°n)$$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$= 8^{3n}\cos(180°n) = \begin{cases} 8^{3n} & n \text{ זוגי} \\ -8^{3n} & n \text{ אי – זוגי} \end{cases}$$

מספר ממשי

מ.ש.ל

ג. רשום משוואה ריבועית שהשורשים שלה הם z_1 ו-z_2.

פתרון

$$(z-z_1)(z-z_2)=0$$

$$\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z+\sqrt{3}+2i\right)=0$$

$$z^2+\cancel{\sqrt{3}z}+2iz-\cancel{\sqrt{3}z}-3-2\sqrt{3}\mathrm{i}=0$$

$$\boxed{z^2+2iz-3-2\sqrt{3}\mathrm{i}=0}$$

בהצלחה