הקנייה

השורשים מסדר n של מספר מרוכב

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 62–63

המצגת נערכה ע״י עומרי גלעדי

הקנייה

למספר מרוכב $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ יש n שורשים שונים והם:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+360^\circ k}{n} + i\sin\frac{\theta+360^\circ k}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

- שורשי היחידה הם מקרה פרטי בו $r = 1$, $\theta = 0$.
- השורשים מסדר n של מספר מרוכב מהווים סדרה הנדסית. האיבר הראשון מתקבל עבור $k = 0$. המנה היא $\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$.
- גם במקרה זה הפתרונות נמצאים על מעגל שרדיוסו $\sqrt[n]{r}$ והם קודקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

הקנייה

דוגמא:

פתור את המשוואה $z^4+2-2\sqrt{3}i=0$.

$$z^4=-2+2\sqrt{3}i$$

$$-2+2\sqrt{3}i=4\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$x+y\cdot i\to r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$$

רביע שני

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{-2}\to\theta=-60°+180°k=120°=\frac{2\pi}{3}$$

הקנייה

דוגמא:

פתור את המשוואה $z^4+2-2\sqrt{3}i=0$.

$$z^4 = 4\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$k = 0, 1, 2, 3$:

$$z_k = \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{4}\right)\right).$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

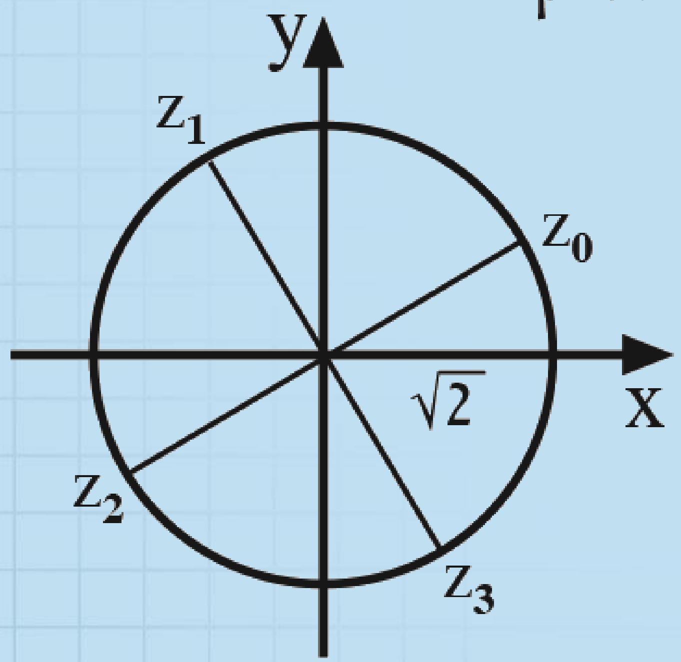
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

הקנייה

המשמעות הגיאומטרית – כמו במקרה של שורשי היחידה גם כאן המספרים z_0, z_1, z_2 ו-z_3 מחלקים את המעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו $\sqrt{2}$ ל-4 חלקים שווים. הנקודות z_0, z_1, z_2 ו-z_3 הן קודקודים של ריבוע.



בהצלחה