הקנייה

כפל מספרים מרוכבים בצורה קוטבית – המישור של גאוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 35–37

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

הקנייה

נראה איך ניתן **לכפול** שני מספרים מרוכבים הכתובים בצורה קוטבית

נתבונן במספרים:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

נעזר בזהויות:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

נכפול את המספרים:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\Big(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\,\underbrace{(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}\Big)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

הקנייה

כלומר, אם $z = z_1 \cdot z_2$ וההצגה הקוטבית של z היא $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ אז
$r = r_1 \cdot r_2$ ו-$\theta = \theta_1 + \theta_2$. במילים אחרות:

אם כופלים שני מספרים מרוכבים הכתובים בצורה הקוטבית אז הערך המוחלט של המכפלה שווה למכפלת הערכים המוחלטים של שני המספרים והארגומנט של המכפלה שווה לסכום הארגומנטים של שני המספרים.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_1 \operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}\theta_2 = r_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)}$$

הקנייה

דוגמא א':

נתון: $z_1 = 2(\cos 70^o + i\sin 70^o)$, $z_2 = 3(\cos 50^o + i\sin 50^o)$. חשב את $z_1 \cdot z_2$.

פתרון:

$$\boxed{r_1 \mathbf{cis}\,\theta_1 \cdot r_2 \mathbf{cis}\,\theta_2 = r_1 \cdot r_2\, \mathbf{cis}(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2(\cos 70^o + i\sin 70^o) \cdot 3(\cos 50^o + i\sin 50^o) \\ &= 2 \cdot 3\left(\cos(70^o + 50^o) + i\sin(70^o + 50^o)\right) \\ &= 6(\cos 120^o + i\sin 120^o) \end{aligned}$$

הקנייה

דוגמא א':

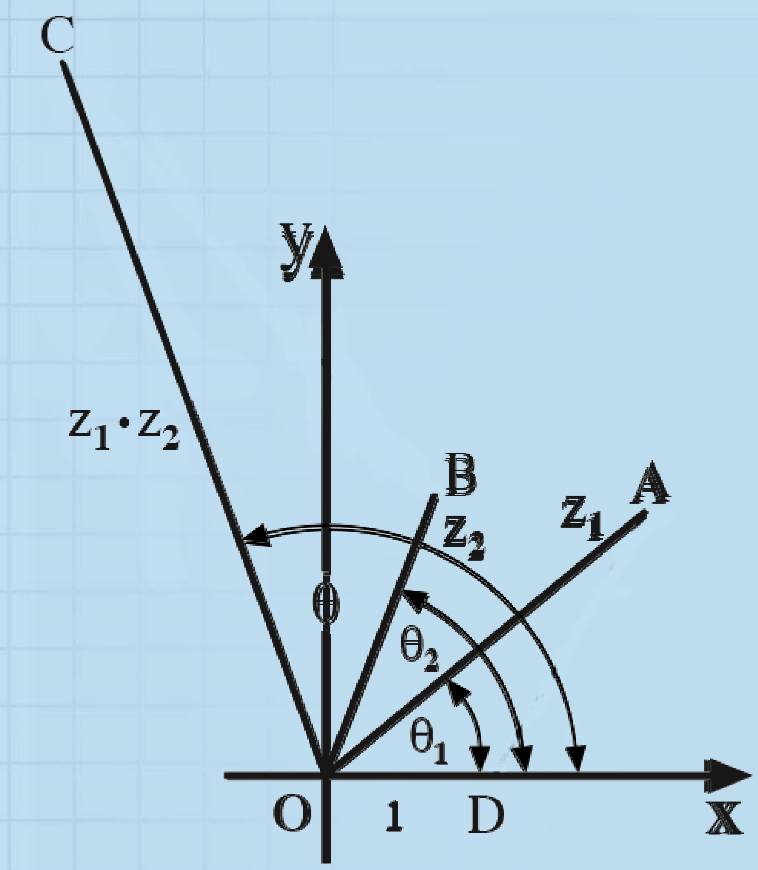
נתון: $z_1 = 2(\cos 70^o + i\sin 70^o)$, $z_2 = 3(\cos 50^o + i\sin 50^o)$. חשב את $z_1 \cdot z_2$.

נבטא את התשובה גם בצורה אלגברית

$$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos 120^o + i\sin 120^o)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos 120° &= -0.5 \\ \sin 120° &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \quad z_1 \cdot z_2 = 6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 + 3\sqrt{3}i$$

הקנייה



<u>המשמעות הגיאומטרית של כפל מספרים מרוכבים:</u>

$$\boxed{\underbrace{r_1 \text{cis}\,\theta_1}_{z_1} \cdot \underbrace{r_2 \text{cis}\,\theta_2}_{z_2} = r_1 \cdot r_2 \,\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\theta_{z_1 \cdot z_2} = \theta_1 + \theta_2$$

$$r_{z_1 \cdot z_2} = r_1 \cdot r_2$$

הקנייה

כפל של מספר מרוכב בחזקות של i

היות ומתקיים $i = cis\,90^\circ$ אז כפל של מספר z ב-i פירושו הגדלת הארגומנט של המספר ב-90° או "סיבוב" המספר ב-90° נגד כיוון מחוגי השעון.

$$i = cis\,90^\circ = \underbrace{\cos 90^\circ}_{0} + \underbrace{i\sin 90^\circ}_{1}$$

באופן דומה:

כפל ב-i^2 הוא סיבוב של 180°

$$i^2 = cis\,180^\circ = \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} + \underbrace{i\sin 180^\circ}_{0}$$

הקנייה

כפל של מספר מרוכב בחזקות של i

באופן דומה:

כפל ב-i^3 הוא סיבוב של 270° (או של -90°)

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i = cis\,270^\circ = \underbrace{\cos 270^\circ}_{0} + i\underbrace{\sin 270^\circ}_{-1}$$

הקנייה

כפל של מספר מרוכב בחזקות של i

באופן דומה:

וכפל ב-i^4 הוא סיבוב של 360°.

$$i^4 = (i^2)^2 = 1 = cis\,360^\circ = \underbrace{\cos 360^\circ}_{1} + \underbrace{i\sin 360^\circ}_{0}$$

הקנייה

<u>נסכם:</u>

כפל של מספר מרוכב בחזקות של i

כפל ב- i הוא סיבוב של 90°

כפל ב- i^2 הוא סיבוב של 180°

כפל ב- i^3 הוא סיבוב של 270° (או של -90°)

וכפל ב- i^4 הוא סיבוב של 360°.

הקנייה

כפל של מספר מרוכב בחזקות של i

התוצאות הנ"ל נכונות גם לחזקות יותר גבוהות וזאת בהסתמך על הקשרים הבאים:

$i^{4n+1} = i$

סיבוב ב$90°$

$i^{4n+2} = i^2 = -1$

סיבוב ב$180°$

$i^{4n+3} = i^3 = -i$

סיבוב ב$270°$

$i^{4n} = 1$

סיבוב ב$360°$

בהצלחה