הקנייה

שורשי היחידה ב'

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 58

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

הקנייה

$$z^n = 1$$

$$\boxed{z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

$$\boxed{z_k = \cos\frac{360^\circ k}{n} + i\sin\frac{360^\circ k}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

א. $\boxed{\text{מצא את שורשי היחידה מסדר 8.}}$

ב. הוכח שהשורשים הנ"ל מהווים סדרה הנדסית.

$$z_k = \cos\frac{360^\circ k}{8} + i\sin\frac{360^\circ k}{8}. \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \qquad \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$1, \quad \text{cis}\,45^\circ, \quad i, \quad \text{cis}\,135^\circ, \quad -1, \quad \text{cis}\,225^\circ, \quad -i, \quad \text{cis}\,315^\circ.$$

$$1, \ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \ i, \ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \ -1, \ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \ -i, \ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

א. מצא את שורשי היחידה מסדר 8.

ב. הוכח שהשורשים הנ"ל מהווים סדרה הנדסית.

$$\operatorname{cis}\frac{360^\circ(k+1)}{8} : \operatorname{cis}\frac{360^\circ k}{8} = \operatorname{cis}\left(\frac{360^\circ(k+1)}{8} - \frac{360^\circ k}{8}\right) = \operatorname{cis}\frac{360^\circ}{8} = \operatorname{cis}45^\circ$$

שורשי היחידה מסדר 8 מהווים סדרה הנדסית בה:

$$a_1 = z_0 = 1$$

$$q = \operatorname{cis}45$$

תרגיל לדוגמה

דוגמא ג':

הוכח שמכפלת שורשי היחידה מסדר n כאשר n הוא מספר זוגי שווה ל--1.

$$\boxed{z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1}$$

$$z_0 \cdot z_1 \cdot \ldots \cdot z_{n-1} = (\cos 0 + i\sin 0)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(\cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) =$$

$$= \cos\left(0 + \frac{2\pi}{n} + \ldots + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi}{n} + \ldots + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right) =$$

תרגיל לדוגמה

דוגמא ג':

הוכח שמכפלת שורשי היחידה מסדר n כאשר n הוא מספר זוגי שווה ל--1.

$$= \cos\left(0+\frac{2\pi}{n}+\ldots+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)+i\sin\left(0+\frac{2\pi}{n}+\ldots+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)=$$

לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ נקבל:

$$= \cos\frac{(0+2\pi(n-1))n}{2n}+i\sin\frac{(0+2\pi(n-1))n}{2n} = \cos\pi(n-1)+i\sin\pi(n-1)=$$

אם n הוא זוגי אז $n-1$ הוא אי זוגי ולכן

$$= \cos\pi+i\sin\pi = -1+0\cdot i = -1$$

בהצלחה