הקנייה

שורשי היחידה א'

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 57

המצגת נערכה ע״י עומרי גלעדי

הקנייה

$$z^3 = 1$$

הפתרון הברור הוא $z = 1$

בעולם המספרים המרוכבים ישנם פתרונות נוספים

הקנייה

$z^3 = 1$

$z = r\text{cis}\theta$

$(r\text{cis}\theta)^3 = 1 \quad (r\text{cis}\theta)^n = r^n \text{cis}\, n\theta$

$r^3\text{cis}3\theta = 1$

$r^3\text{cis}3\theta = \text{cis}0$

$r^3 = 1$

$\boxed{r = 1}$

$3\theta = 0 + 2\pi k$

$\theta = \frac{2\pi}{3} \cdot k$

k	0	1	2	3	4	5	6
θ	0	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	2π	$\frac{8}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	4π

$0 \le \theta < 2\pi \rightarrow \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = \text{cis}\, 0^\circ = 1$

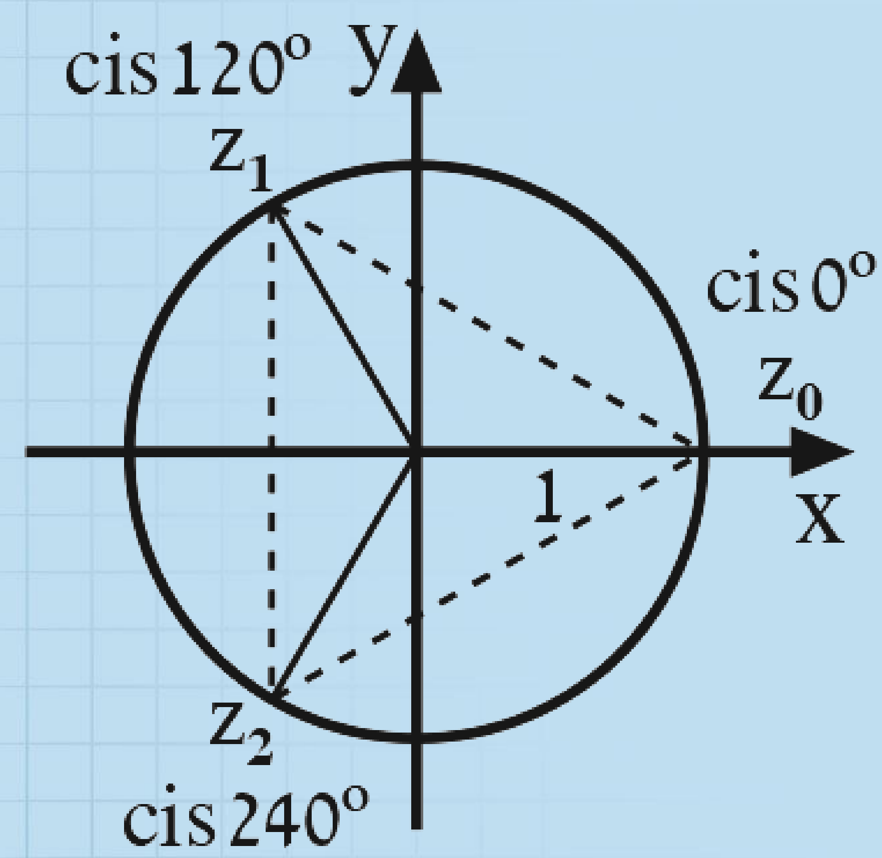
$z_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \text{cis}\, 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \text{cis}\, 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

הקנייה

המשמעות הגיאומטרית –

המספרים z_0, z_1 ו-z_2 מחלקים את מעגל היחידה ל-3 חלקים שווים. הנקודות z_0, z_1 ו-z_2 יוצרות משולש שווה צלעות.



הקנייה

נבדוק עבור z_2 :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$z_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (1 + \sqrt{3}i)^3 =$$

$$= -\frac{1}{8}(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 1 \cdot 3i^2 + 3\sqrt{3}i^3) =$$

$$= -\frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i) = -\frac{1}{8} \cdot (-8) = 1$$

בהצלחה