תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה – פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

דוגמה, 329 עמ', 482

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה — פונקציות חזקה
עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

נביא דוגמא לחקירת פונקציה עם שורש רביעי.

תרגיל לדוגמה

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{x-6}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה-x של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה **הנגזרת** $\mathbf{f'(x)}$ עם ציר ה-x ואת תחומי החיוביות והשליליות שלה.

ח. מצא את התחום שבו $f(x)$ חיובית וגם $f'(x)$ חיובית.

תרגיל לדוגמה

פתרון:

א. **תחום ההגדרה** – הביטוי $x-6$ שבתוך השורש הרביעי צריך להיות אי שלילי. היות והשורש הרביעי הוא במכנה אז הוא צריך להיות שונה מאפס ולכן תחום ההגדרה הוא $x > 6$.

ב. **נקודות הקיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-6)^{\frac{1}{4}} - x \cdot \frac{1}{4}(x-6)^{-\frac{3}{4}}}{(x-6)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

תרגיל לדוגמה

ע״י הכפלת המונה ב- $4(x-6)^{\frac{3}{4}}$ נקבל: $4(x-6)-x=0$, כלומר $4x-24-x=0$,

ז״א $3x=24$ ולכן $x=8$. בסה״כ **המכנה** של הנגזרת הראשונה הוא $4(x-6)^{\frac{5}{4}}$,

כלומר הוא חיובי עבור $x=8$. מספיק, אם כן, לגזור את המונה של הנגזרת הראשונה

כדי לקבוע אם ב- $x=8$ יש מינימום או מקסימום. נגזרת המונה של הנגזרת הראשונה

היא 3 ולכן ב- $x=8$ יש מינימום. ערך המינימום הוא $\frac{8}{\sqrt[4]{8-6}}=\frac{8}{\sqrt[4]{2}}=6.73$.

לסיכום: לפונקציה יש נקודת קיצון אחת והיא $(8, 6.73)$ מינימום.

תרגיל לדוגמה

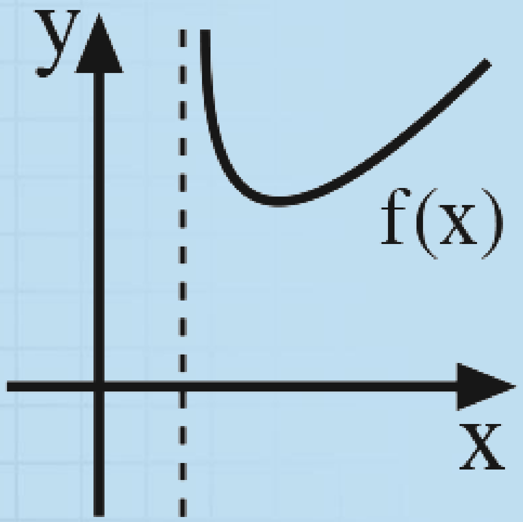
ד. **נקודות החיתוך עם הצירים** – הפונקציה לא חותכת את הצירים כי תחום ההגדרה שלה הוא $x > 6$. (הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ ואם נשווה את הפונקציה לאפס נקבל שוב $x = 0$ וזה לא ייתכן).

ה. **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-x** – המכנה שווה לאפס כאשר $x = 6$. המונה לא שווה לאפס כאשר $x = 6$. לכן הישר $x = 6$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

תרגיל לדוגמה

ו. **שרטוט גרף הפונקציה** – ניתן להיעזר בטבלה. התיאור הגרפי מופיע משמאל.

x	$6<x<8$	8	$x>8$
$f(x)$		6.73	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
עלייה ירידה	↘		↗



$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{x-6}}$$

תרגיל לדוגמה

ז. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x = 8$, לכן הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $(8,0)$. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 8$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית. באופן דומה הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $6 < x < 8$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא שלילית.

ח. הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $x > 6$. הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום $x > 8$. לכן הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ חיוביות בתחום $x > 8$.

בהצלחה