פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 331, ת. 8

השאלה

חקור את הפונקציות הבאות בהתאם לסעיפים הבאים ומצא:

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) אסימפטוטה אנכית לציר ה-x. **(רק בתרגילים 2, 8 ו-9)**.

ו) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8) $$y=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **א)** תחום הגדרה.

<u>סעיף א':</u>

פתרון

$$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$$

תחום ההגדרה של הביטוי $x^{\frac{1}{3}}$ הוא: $x \geq 0$
(כי זאת פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי חיובי).

בנוסף, למכנה אסור להתאפס, ולכן: $x^{\frac{1}{3}} - 1 \neq 0$

$$x^{\frac{1}{3}} \neq 1 \longrightarrow x \neq 1$$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **א)** תחום הגדרה.

פתרון

לסיכום:

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x \geq 0 \;,\; x \neq 1$

ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

$$y=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$$

פתרון

סעיף ב':

$$y=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$$

$$y'=\frac{1\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)-x\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{2}}$$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right) - x \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{x}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0$$

$$3x - 3x^{\frac{2}{3}} - \mathrm{x} = 0$$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$2x - 3x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{2}{3}}\left(2x^{\frac{1}{3}} - 3\right) = 0$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$x = 0$$

$$2x^{\frac{1}{3}} - 3 = 0$$

$$2x^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$y=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$$

ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$x^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$x=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$$

$$x=\frac{27}{8}$$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

קיבלנו שיש שתי נקודות החשודות כקיצון: $x = 0$ ו- $x = \frac{27}{8}$

נשים לב לכך ששתי הנקודות כלולות בתחום ההגדרה של פונקציה.

בנוסף, הנקודה $x = 0$ היא **הקצה השמאלי** של תחום ההגדרה של

הפונקציה, ולכן זוהי **נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה**.

$$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$$

ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

כדי לקבוע את סוג הקיצון, נבדוק את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה על-פי הסימן של הנגזרת הראשונה.

נבדוק את סימן הנגזרת בנקודה $x = 2$ (שנמצאת מימין ל- $x = 0$ ומשמאל ל- $x = \frac{27}{8}$.

נבדוק גם את סימן הנגזרת בנקודה $x = 4$ (שנמצאת מימין לנקודה $x = \frac{27}{8}$).

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$y' = \frac{1 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right) - x \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^2}$$

$$y'(2) = \frac{1 \cdot \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}}{\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)^2} = \frac{-0.16}{+} < 0 \longrightarrow$$ יורדת

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$y'(4) = \frac{1 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}} - 1\right) - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4^{-\frac{2}{3}}}{\left(4^{\frac{1}{3}} - 1\right)^2} = \frac{0.05}{+} > 0$$

→ עולה

הפונקציה יורדת החל מנקודת הקצה $x = 0$, ולכן יש לפונקציה נקודת **מקסימום** ב- $x = 0$.

הפונקציה יורדת משמאל לנקודה $x = \frac{27}{8}$ ועולה מימין לנקודה הזאת, ולכן זוהי נקודת **מינימום**.

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$$

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

$$x = \frac{27}{8} \rightarrow y = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{27}{4}$$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

לסיכום:

$(0,0)$ מקסימום

$\left(\frac{27}{8}, \frac{27}{4}\right)$ מינימום

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

סעיף ג':

ראינו בסעיף הקודם כי:

תחומי עלייה: $x > \frac{27}{8}$

תחומי ירידה: $1 < x < \frac{27}{8}$, $0 < x < 1$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים. $y=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

פתרון

סעיף ד':

$$y=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$$

חיתוך עם ה-y: ראינו בסעיף ב' שהחיתוך הוא בנקודה $(0,0)$

חיתוך עם ה-x: $x=0$ ⟵ $\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}=0$

לכן, יש רק נקודת חיתוך אחת עם הצירים, והיא: $(0,0)$

$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$ **ה)** אסימפטוטה אנכית לציר ה-x. **(רק בתרגילים 2, 8 ו-9)**.

פתרון

<u>סעיף ה':</u>

$$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$$

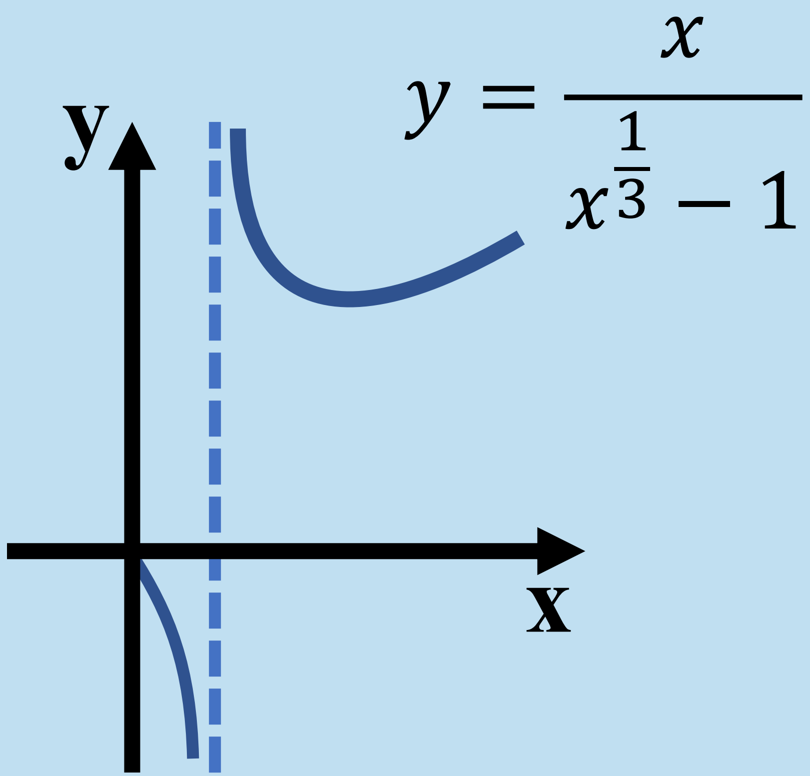
$x = 1$ **מאפס את המכנה**, אבל **לא מאפס את המונה.**

לכן הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

$$y = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$$ ו) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

סעיף ו':



בהצלחה