פתרון תרגיל

חקירת פונקציה-פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 331, ת. 10

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

10) לפונקציה $y=(x-a)\sqrt[4]{x}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=1$.

א. מצא את a.

ב. חקור את הפונקציה ומצא:

(1) תחום הגדרה.
(2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה.
(4) חיתוך עם הצירים.

ג. שרטט את גרף הפונקציה.

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $\mathbf{g'(x)=f(x)}$ בתחום $x\ge 0$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ וקבע את סוגה.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.
(3) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=16$ שעל גרף הפונקציה $g(x)$.

א. מצא את a.

פתרון

סעיף א':

$$y=(x-a)\sqrt[4]{x}$$

נתון כי: $y'(1)=0$

$$y=(x-a)x^{\frac{1}{4}}$$

$$y'=1\cdot x^{\frac{1}{4}}+(x-a)\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}$$

א. מצא את a.

פתרון

$$y' = 1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + (x-a) \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$$

$$y' = x^{\frac{1}{4}} + \frac{x-a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$y' = \frac{4x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}} + x - a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

א. מצא את a.

פתרון

$$y' = \frac{4x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}} + x - a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$y' = \frac{4x + x - a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$y' = \frac{5x - a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

א. מצא את a.

פתרון

$$y'(1) = 0 \rightarrow y' = \frac{5x - a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$5 - a = 0$$

$$\boldsymbol{a = 5}$$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה.

פתרון

סעיף ב': (1)

$$a=5 \rightarrow y=(x-a)\sqrt[4]{x}$$

$$y=(x-5)\sqrt[4]{x}$$

$$a=5 \rightarrow y'=\frac{5x-a}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$y'=\frac{5x-5}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה.

פתרון

$$y = (x-5)\sqrt[4]{x}$$

השורש הוא מסדר **זוגי**, ולכן תחום ההגדרה הוא: $x \geq 0$

ב.   חקור את הפונקציה ומצא: (2) נקודות קיצון.

פתרון

(2)

$$y' = \frac{5x - 5}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$5x - 5 = 0$$

$$x = 1$$

נקבע את סוג הקיצון בעזרת הסימן של הנגזרת הראשונה משמאל ומימין לנקודה שבה $x = 1$.

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (2) נקודות קיצון.

פתרון

$$y' = \frac{5x-5}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$y'(0.5) = \frac{5 \cdot 0.5 - 5}{4(0.5)^{\frac{3}{4}}} = \frac{-2.5}{+} < 0 \longrightarrow \text{יורדת}$$

$$y'(2) = \frac{5 \cdot 2 - 5}{4 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{5}{+} > 0 \longrightarrow \text{עולה}$$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (2) נקודות קיצון.

פתרון

מסקנה: בנקודה $x = 1$ יש לפונקציה נקודת **מינימום**.

$$x = 1 \rightarrow y = (x - 5)\sqrt[4]{x}$$

$$y = (1 - 5) \cdot \sqrt[4]{1} = -4$$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (2) נקודות קיצון.

פתרון

בנוסף, תחום ההגדרה הוא: $x \geq 0$.

לכן, יש לפונקציה נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה גם ב- $x = 0$.

ראינו קודם שהפונקציה יורדת מימין לנקודה $x = 0$.

לפיכך, לפונקציה יש נקודת **מקסימום** כאשר $x = 0$.

$x = 0 \ \rightarrow y = (x-5)\sqrt[4]{x}$ $\qquad$ $y = 0$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (2) נקודות קיצון.

פתרון

לסיכום:

$(1,-4)$ מינימום

$(0,0)$ מקסימום

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (3) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

(3) תחומי עלייה וירידה:

עולה: $x > 1$

יורדת: $0 < x < 1$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (4) חיתוך עם הצירים.

פתרון

(4) נקודות חיתוך עם הצירים:

$$y = (x-5)\sqrt[4]{x}$$

<u>חיתוך עם ציר ה-y</u>: כאשר $x=0$, שיעור ה- y הוא 0.
לכן הנקודה היא: $(0,0)$

<u>חיתוך עם ציר ה-x</u>: $(x-5)\sqrt[4]{x} = 0$

$$x-5=0 \ \rightarrow x=5$$

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (4) חיתוך עם הצירים.

פתרון

לסיכום:

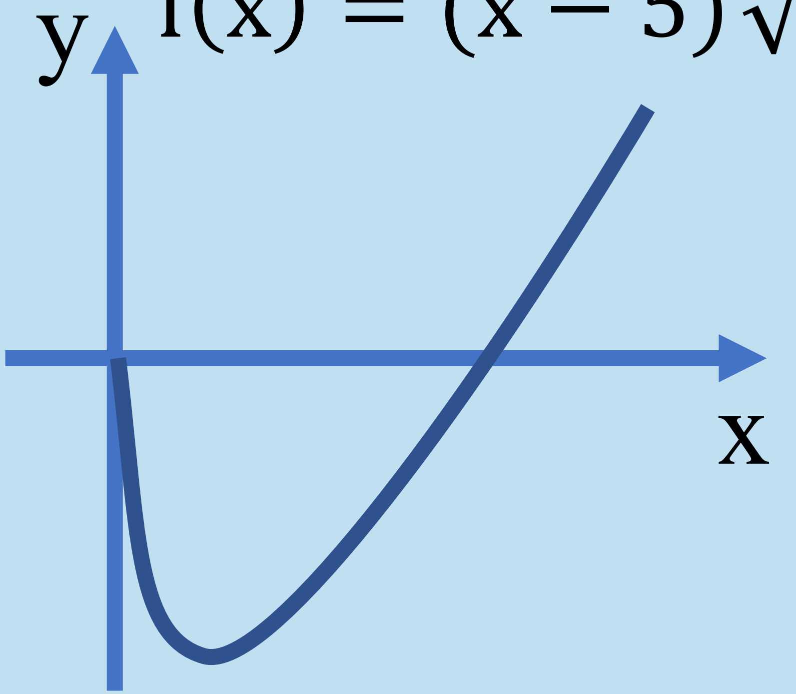
נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(0,0)$ ו- $(5,0)$

ג. שרטט את גרף הפונקציה.

פתרון

סעיף ג':

$$f(x) = (x-5)\sqrt[4]{x}$$



ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x \geq 0$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

<u>**סעיף ד':**</u> (1)

$$g'(x) = f(x)$$

לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון פנימית כאשר $f(x) = 0$,
בתנאי ש- $f(x)$ משנה סימן בנקודה זו.
ראינו בסעיף ב (4) כי $f(x) = 0$ כאשר $x = 5$.

לפי הסקיצה, $f(x)$ אכן משנה סימן בנקודה הזאת, והופכת משלילית
לחיובית.

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x \geq 0$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

לכן, הפונקציה $g(x)$ משנה התנהגות ב- $x = 5$ מירידה לעלייה.

מסקנה: לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x = 5$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x \geq 0$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

פתרון

(2) $g(x)$ יורדת כאשר: $0 < x < 5$

(2) $g(x)$ עולה כאשר $x > 5$

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x \geq 0$.

(3) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 16$ שעל גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

(3) יש למצוא את $g'(16)$.

לכן, יש למצוא את $f(16)$.

$$y = (x-5)\sqrt[4]{x}$$

$$x = 16 \rightarrow y = (16-5)\sqrt[4]{16} = 22$$

לכן, שיפוע המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 16$ הוא 22.

בהצלחה