פתרון תרגיל

תרגילים לחזרה–חקירת פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 259, ת. 12

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע״מ

השאלה

12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^n e^{-x^2}$, n מספר טבעי. ידוע שכאשר $x = 1$ יש לפונקציה נקודת קיצון.

א. מצא את n.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. הסבר מדוע הפונקציה לא מקבלת ערכים שליליים.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הסבר מדוע הנקודות שמצאת בסעיף ב' הן נקודות הקיצון **המוחלטות** של הפונקציה.

ו. כמה נקודות חיתוך יש לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה-x? נמק.

ז. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = f(x)+b$.

מצא את b במקרים הבאים:

(1) ציר ה-x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה אחת בדיוק.

(2) ציר ה-x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות בדיוק.

א. מצא את n.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = x^n e^{-x^2}$$

נתון כי: $f'(1) = 0$

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} + x^n \cdot (-2x)e^{-x^2}$$

$$0 = n \cdot 1 \cdot e^{-1} + 1 \cdot (-2) \cdot e^{-1}$$

$$\frac{n}{e} - \frac{2}{e} = 0$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$n - 2 = 0$$

$$\boldsymbol{n = 2}$$

סעיף ב':

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} + x^n \cdot (-2x)e^{-x^2}$$

$$n = 2 \rightarrow f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(2x - 2x^3)$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$e^{-x^2}(2x - 2x^3) = 0$$

$$2x - 2x^3 = 0$$

$$x(2 - 2x^2) = 0$$

$$x = 0$$

$$2 - 2x^2 = 0$$

$$x = -1, x = 1$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$f'(x) = e^{-x^2}(2x - 2x^3)$$

$$f''(x) = -2xe^{-x^2}(2x - 2x^3) + e^{-x^2}(2 - 6x^2)$$

$f''(0) = 0+e^0(2 - 6 \cdot 0) > 0 \rightarrow$ מינימום

$f''(-1) = 0 + e^{-1}(2 - 6) < 0 \rightarrow$ מקסימום

$f''(1) = 0 + e^{-1}(2 - 6) < 0 \rightarrow$ מקסימום

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

$$n = 2 \rightarrow f(x) = x^n e^{-x^2}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-(-1)^2} = \frac{1}{e}$$

$$f(1) = 1^2 \cdot e^{-1^2} = \frac{1}{e}$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

פתרון

לסיכום:

$(0,0)$ מינימום

$\left(1,\frac{1}{e}\right)$ מקסימום

$\left(-1,\frac{1}{e}\right)$ מקסימום

ג. הסבר מדוע הפונקציה לא מקבלת ערכים שליליים.

פתרון

<u>סעיף ג':</u>

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

מתקיים: $0 \leq x^2$ לכל x.

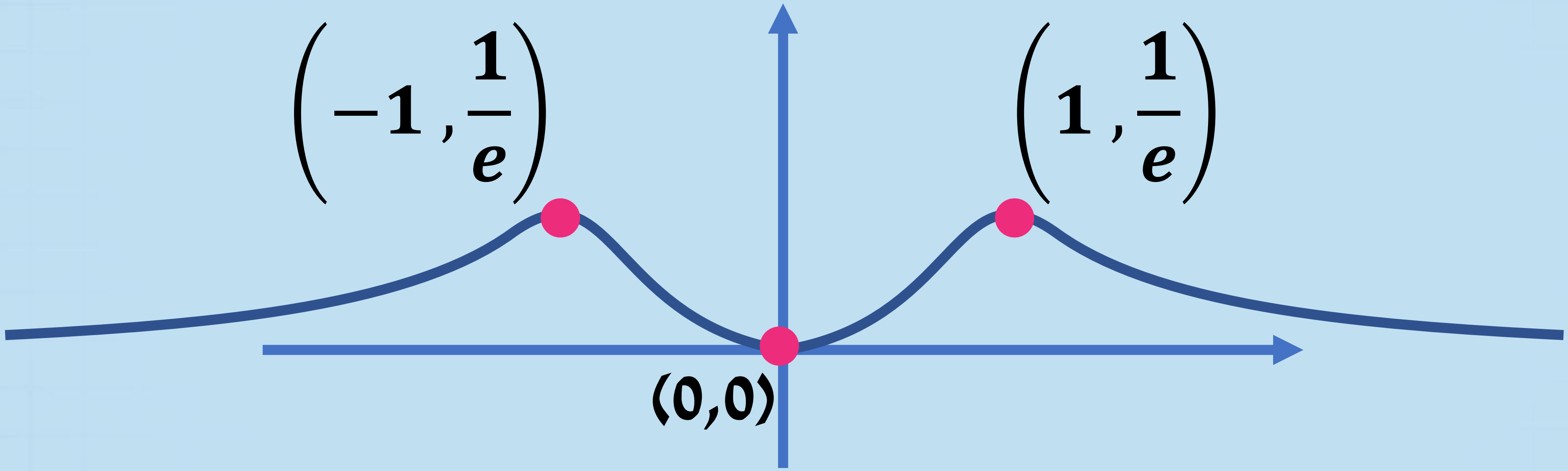
מתקיים: $0 < e^{-x^2}$ לכל x.

לכן מתקיים: $0 \leq x^2 e^{-x^2}$, ולכן $f(x)$ לא מקבלת ערכים שליליים.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

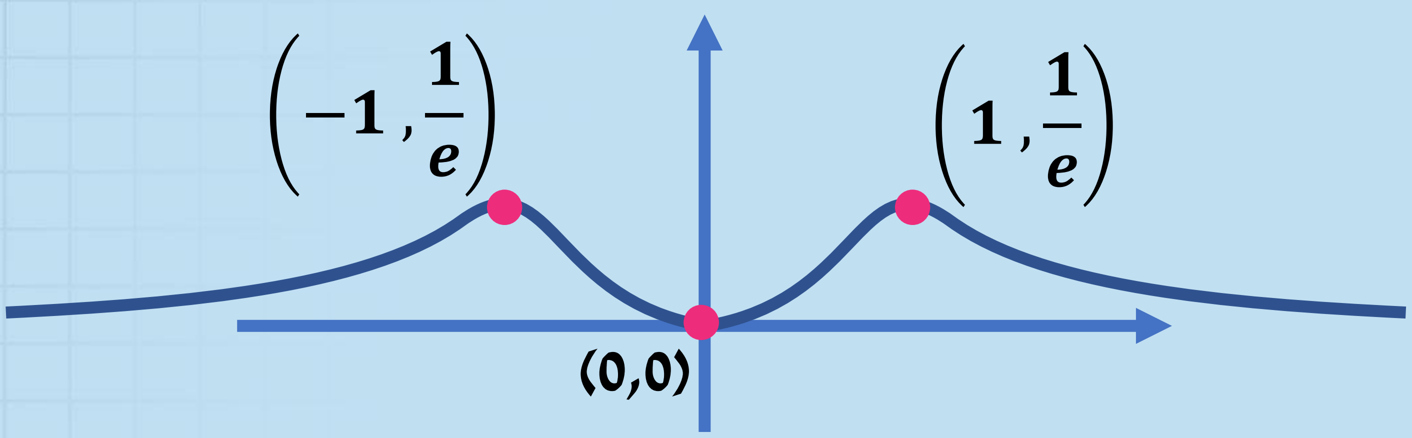
<u>סעיף ד':</u>



ה. הסבר מדוע הנקודות שמצאת בסעיף ב׳ הן נקודות הקיצון **המוחלטות** של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ה׳:</u>



בסקיצה רואים שהנקודה **הכי נמוכה** של הפונקציה היא הנקודה $(0,0)$, ולכן זהו **המינימום המוחלט** של הפונקציה.

בסקיצה רואים גם שנקודות המקסימום הן הנקודות **הגבוהות ביותר** על גרף הפונקציה. לכן הן נקודות **המקסימום המוחלט** של הפונקציה.

ו. כמה נקודות חיתוך יש לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה-x ? נמק.

פתרון

<u>סעיף ו':</u>

הפונקציה $f'(x)$ נחתכת עם ציר ה-x בנקודות שבהן $f'(x) = 0$.

ראינו שלפונקציה יש שלוש נקודות קיצון פנימיות. בנקודות הקיצון

הפנימיות מתקיים: $f'(x) = 0$

לכן, הפונקציה $f'(x)$ נחתכת עם ציר ה-x בשלוש נקודות.

ז. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = f(x)+b$. מצא את b במקרים הבאים:

(1) ציר ה-x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה אחת בדיוק.

(2) ציר ה-x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות בדיוק.

פתרון

<u>סעיף ז':</u>

$$g(x) = f(x) + b$$

הפונקציה $g(x)$ היא הזזה של הפונקציה $f(x)$ כלפי מעלה או כלפי מטה

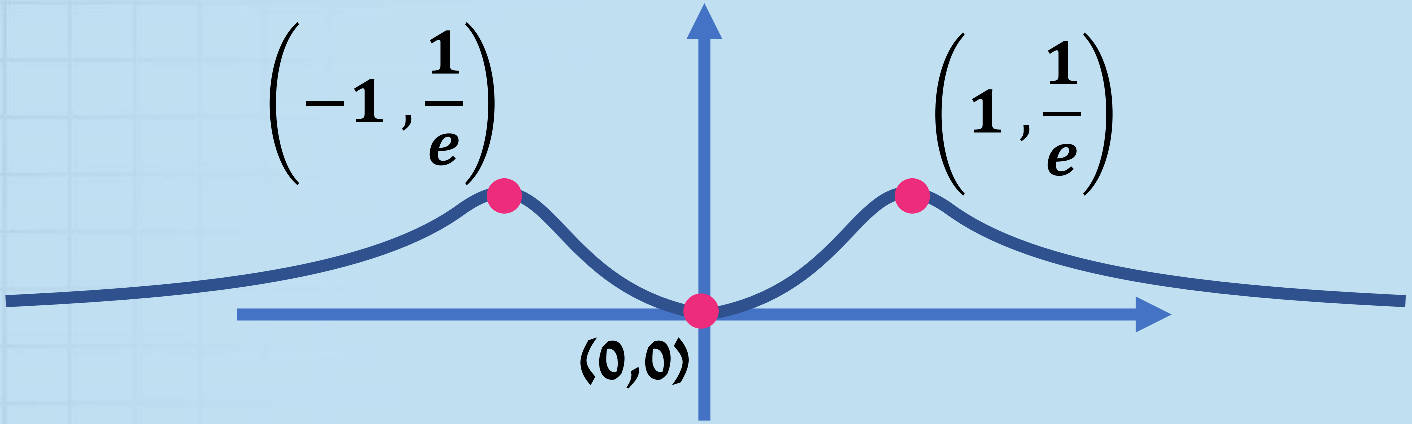
(תלוי בסימן של b).

ז. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = f(x)+b$. מצא את b במקרים הבאים:

(1) ציר ה-x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה אחת בדיוק.

פתרון

(1)



המקרה היחיד שבו ציר ה-x משיק לגרף הפונקציה הוא כרגע, כלומר,
כאשר $g(x) = f(x)$.

לכן, $b = 0$.

ז. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = f(x)+b$. מצא את b במקרים הבאים:

(2) ציר ה- x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות בדיוק.

פתרון

(2)

ציר ה-x ישיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות שונות כאשר שתי נקודות המקסימום יהיו על ציר ה-x.

לשם כך, צריך להזיז את הפונקציה $f(x)$ כלפי מטה ב- $\frac{1}{e}$ יחידות.

$$b = -\frac{1}{e}$$

בהצלחה