הקנייה

הנגזרת–פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 319

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

הנגזרת — פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

בלימודי החשבון הדיפרנציאלי ראינו שהנוסחה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה ל-n **טבעי** וגם ל-n **שלם ושלילי**. נראה עכשיו שנוסחה זו נכונה גם כאשר המעריך הוא **שבר**, כלומר הוא מספר **רציונאלי** מהצורה $\frac{n}{m}$ כאשר n ו-m הם מספרים שלמים ו-$m \neq 0$.

הקנייה

הנגזרת של הפונקציה $y = x^{\frac{n}{m}}$:

נעבור למציאת הנגזרת של פונקציית החזקה $y = x^{\frac{n}{m}}$. (n ו-m שלמים, $m \neq 0$,

$x > 0$). אם $y = x^{\frac{n}{m}}$ אז ניתן להעלות בחזקת m את שני האגפים, נקבל $y^m = x^n$.

נגזור את שני האגפים **לפי** x, נסתמך באגף שמאל על הנגזרת של פונקציה מורכבת

(כלל השרשרת) ונקבל: $my^{m-1} \cdot y' = nx^{n-1}$. נחלץ את y' ונקבל $y' = \dfrac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}$.

נציב $y = x^{\frac{n}{m}}$, נסתמך על חוקי החזקות הרגילים ונקבל:

הקנייה

$$y' = \frac{nx^{n-1}}{m\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}}{mx^{n-\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m}x^{n-1-n+\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

כלומר הנוסחה היא:

$$\boxed{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}}$$

$(x > 0, \quad m \neq 0)$

הקנייה

הערות:

א) עפ"י התוצאה רואים שהנוסחה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה גם ל- n רציונאלי (שבר).

ב) למעשה הנוסחה הנ"ל נכונה גם כשהמעריך הוא **מספר ממשי** ולא בהכרח רציונאלי.

ג) הנוסחה שקיבלנו תאפשר לנו לגזור פונקציות (כולל פונקציות מורכבות) שבהן מופיע שורש שלישי, רביעי וכו'.

ד) למרות שהביטוי $x^{\frac{n}{m}}$ מוגדר רק עבור $x > 0$ ניתן להיעזר בנוסחה גם עבור $x \le 0$. **לדוגמא** – ניתן בעזרת הנוסחה לגזור את הפונקציה $y = \sqrt[3]{x}$ שמוגדרת **לכל** x ע"י שרושמים $y = x^{\frac{1}{3}}$. נקבל: $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

הקנייה

שים לב: הנגזרת של הפונקציה $y = x^{\frac{1}{3}}$ היא $y' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ והיא מוגדרת רק עבור $x > 0$.

לעומת זאת, הנגזרת של הפונקציה $y = \sqrt[3]{x}$ היא $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ והיא מוגדרת עבור $x \neq 0$.

ה) הנוסחה מאפשרת גם למצוא נגזרות מסדרים גבוהים של פונקציות עם שורשים, כולל **שורש ריבועי**.

הקנייה

לדוגמא – את הפונקציה $y = x\sqrt{x}$ ניתן לרשום בצורה $y = \sqrt{x^3}$ ולכן גם בצורה $y = x^{\frac{3}{2}}$. אם נגזור עפ"י הנוסחה נקבל: $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$,
$y''' = -\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{8\sqrt{x^3}}$ (נגזרת שלישית) וכו'.

שים לב: גם את הפונקציה $y = \sqrt{x}$ אפשר לגזור בעזרת הנוסחה הנ"ל. נרשום $y = x^{\frac{1}{2}}$ ואז $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ כלומר $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

הקנייה

ו) ניתן לרשום את הנוסחה גם בעזרת שורשים. לגבי המעריך באגף ימין נקבל

$\frac{n-m}{m} = \frac{n}{m} - 1$ ולכן **הנוסחה** היא: $\left(\sqrt[m]{x^n}\right)' = \frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{n-m}}$.

אם $\frac{n}{m}$ הוא חיובי ומצומצם ו-m הוא מספר אי זוגי אז הנוסחה הנ"ל נכונה **לכל** x

ולא רק ל-$x > 0$.

בעזרת הנגזרת של פונקציה מורכבת נקבל:

$$\boxed{\left((f(x))^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m}(f(x))^{\frac{n}{m}-1} \cdot f'(x)} \qquad (m \neq 0 \quad ,f(x) > 0)$$

הקנייה

דוגמא א׳:

גזור את הפונקציה $y = \sqrt[3]{x^2}$.

פתרון:

תחילה נכתוב את הפונקציה בעזרת מעריך שהוא שבר, נקבל $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

נגזור לפי הנוסחה הנ״ל: $y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

בהצלחה