פתרון תרגיל

נגזרת הפונקציה $f(x) = \log_a x$ ושימושיה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 315, ת. 26

השאלה

26) נתונה הפונקציה $f(x)=\log(x^2-5x+4)-1$ (הלוגריתם לפי בסיס 10).

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ג. מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x?

ד. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. $g(x)$ היא הפונקציה $\mathbf{g(x)=f(x)+3}$. מהן האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$?
נמק, אין צורך לבצע חישובים חדשים.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = log(x^2 - 5x + 4) - 1$$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x^2 - 5x + 4 > 0$

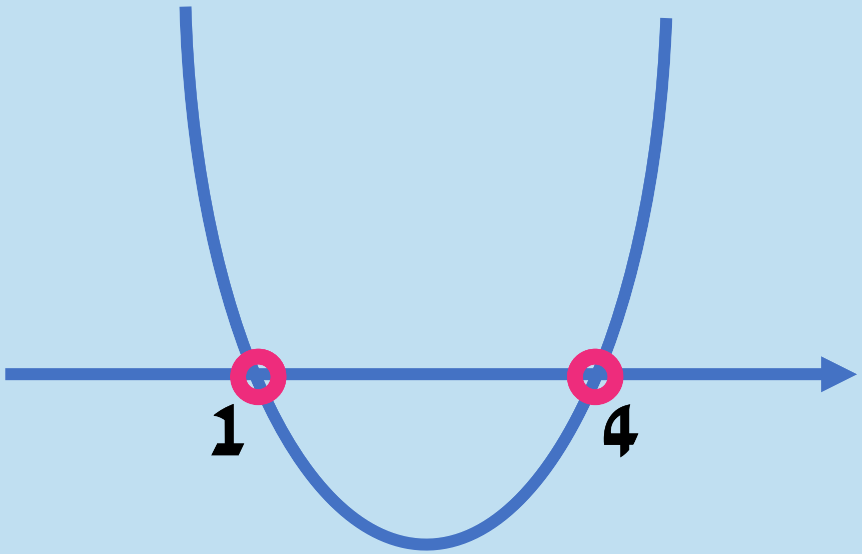
$a = 1$, ולכן הפרבולה ישרה.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1 , \qquad x = 4$$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

פתרון



הפתרון הוא: $1 < x$ או $4 > x$. לכן זהו תחום ההגדרה.

ב. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$f(x) = log(x^2 - 5x + 4) - 1$$

האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה מתקבלות כאשר $x^2 - 5x + 4 = 0$.

כלומר, האסימפטוטות הן: $x = 1$ ו- $x = 4$.

ג. מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x ?

פתרון

סעיף ג':

$$f(x) = log(x^2 - 5x + 4) - 1$$

$$log(x^2 - 5x + 4) - 1 = 0$$

$$log(x^2 - 5x + 4) = 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 10$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

ג. מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x?

פתרון

$$x = -1 \quad , \qquad x = 6$$

שני הפתרונות הנ״ל נמצאים בתחום ההגדרה של הפונקציה.

לכן, נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x הם: **$(-1,0)$** ו- **$(6,0)$**

ד. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

פתרון

<u>סעיף ד':</u>

$$f(x) = log(x^2 - 5x + 4) - 1$$

$$f'(x) = \frac{2x - 5}{ln10 \cdot (x^2 - 5x + 4)}$$

$$\frac{2x - 5}{ln10 \cdot (x^2 - 5x + 4)} = 0$$

ד. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

פתרון

$$2x - 5 = 0$$

$x = \cancel{2.5}$ נפסל בגלל תחום ההגדרה של הפונקציה

לכן, לפונקציה אין נקודות קיצון.

$f(x)$ מוגדרת כאשר $x < 1$ או $x > 4$. נבדוק האם הפונקציה עולה או יורדת בכל אחד מהתחומים האלה בעזרת **הסימן של הנגזרת**.

ד. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

פתרון

$$f'(x) = \frac{2x-5}{ln10 \cdot (x^2-5x+4)}$$

$$f'(0) = \frac{-5}{ln10 \cdot 4} = -0.54 < 0 \longrightarrow \text{יורדת}$$

$$f'(5) = \frac{2 \cdot 5 - 5}{ln10 \cdot (5^2 - 5 \cdot 5 + 4)} = \frac{5}{ln10 \cdot 4} = 0.54 > 0 \longrightarrow \text{עולה}$$

ד. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

פתרון

לסיכום:

הפונקציה עולה כאשר $x > 4$

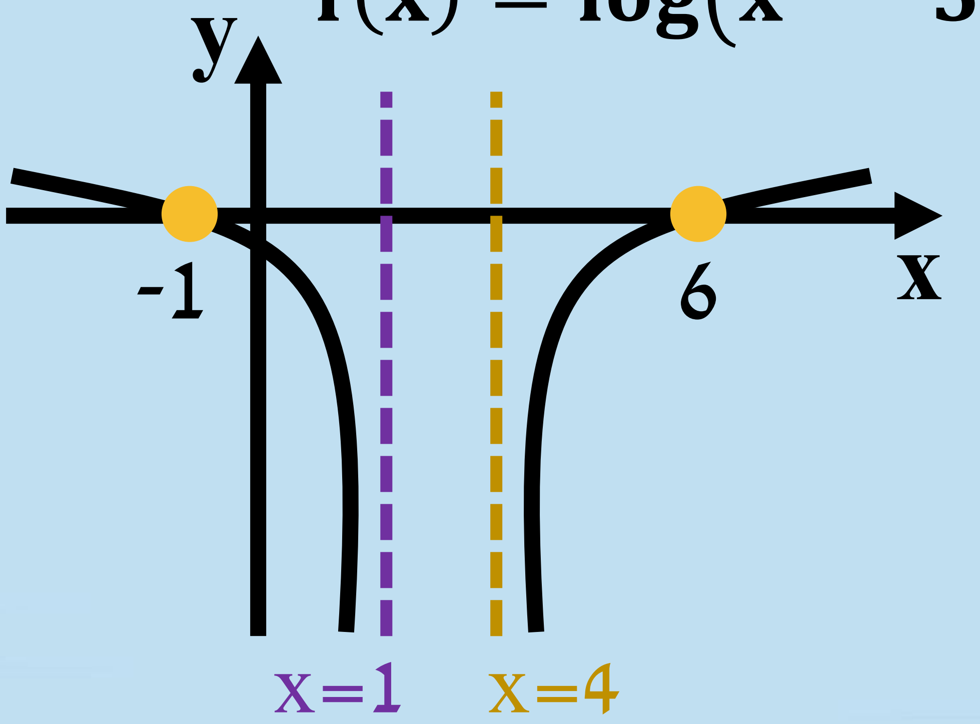
הפונקציה יורדת כאשר $x < 1$

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

סעיף ה':

$$f(x) = \log\left(x^2 - 5x + 4\right) - 1$$



ו. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x)=f(x)+3$. מהן האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$?
נמק, אין צורך לבצע חישובים חדשים.

פתרון

<u>סעיף ו':</u>

$$g(x)=f(x)+3$$

הפונקציה $g(x)$ מתקבלת על-ידי הזזה של הפונקציה $f(x)$ ב-3 יחידות כלפי מעלה.

כאשר מזיזים פונקציה כלפי מעלה או כלפי מטה, האסימפטוטות האנכיות שלה נותרות ללא שינוי.

לפיכך, האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$ הן: $x=1$ ו- $x=4$.

בהצלחה