הקנייה

נגזרת הפונקציה

$$f(x) = \log_a x$$

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 312

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

נגזרת הפונקציה $f(x) = \log_a x$ ושימושיה

בסעיף זה נלמד לגזור פונקציה לוגריתמית מהצורה $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

כדי לעשות זאת ניעזר בנוסחת המעבר מבסיס לבסיס (ראה עמ' 49): $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

נוכל לרשום $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ונזכור ש-$\ln a$ זהו **מספר קבוע** שלא תלוי ב-x.

עכשיו נגזור ונקבל: $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.

הקנייה

לסיכום, הנוסחה היא: $(x > 0)$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

בהסתמך על כך שמתקיים $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ ניתן גם לרשום:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

בהסתמך על הנגזרת של פונקציה מורכבת נוכל לרשום נוסחה נוספת:

$$(\log_a f(x))' = \frac{f(x)'}{f(x)\ln a}$$

הקנייה

דוגמא:

מצא את נקודת הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = x - \log_2 x$.

פתרון:

נקודת הקיצון – נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס, נקבל: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln 2} = 0$

לכן $x = \frac{1}{\ln 2} = 1.44$. בעזרת הנגזרת השנייה נקבל שזאת נקודת מינימום.

שיעור ה-y הוא: $y = 1.44 - \log_2 1.44 = 1.44 - \frac{\ln 1.44}{\ln 2} = 0.91$.

לסיכום: לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(1.44, 0.91)$.

הקנייה

עלייה וירידה – בהתחשב בנקודת המינימום ובתחום ההגדרה של הפונקציה, שהוא $x > 0$, נקבל: הפונקציה עולה בתחום $x > 1.44$ והיא יורדת בתחום $0 < x < 1.44$.

בהצלחה