# פתרון תרגיל

## תרגילים לחזרה–חקירת פונקציות לוגריתמיות

## מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

**482 , עמ' 308, ת. 15**

# השאלה

**15)** לפונקציה $f(x) = (\ln x)^2 + a\ln x$ יש נקודת קיצון ב-$x = e$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את $a$ ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ בתחום $x > 0$. מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

ו. מצא את שיעורי ה-$x$ של שתי נקודות שעל גרף הפונקציה $g(x)$ **ששיפוע המשיק** בהן לגרף של $g(x)$ הוא $3$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

# פתרון

$$f(x) = (lnx)^2 + alnx$$

תחום ההגדרה של הפונקציה: $x > 0$

ב. מצא את a ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

# פתרון

נתון כי: $f'(e) = 0$

$$f'(x) = \frac{2lnx}{x} + \frac{a}{x}$$

$$\frac{2lne}{e} + \frac{a}{e} = 0$$

$$\frac{2}{e} + \frac{a}{e} = 0$$

ב. מצא את a ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

# פתרון

$$2 + a = 0$$

$$a = -2$$

מציבים $a = -2$ בפונקציה המקורית, ומקבלים: $f(x) = (lnx)^2 - 2lnx$

ב. מצא את a ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

## פתרון

$$f'(x) = \frac{2lnx}{x} - \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2lnx \cdot 1}{x^2} + \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 - 2lnx}{x^2} + \frac{2}{x^2}$$

ב. מצא את a ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

# פתרון

$$f''(x) = \frac{2 - 2lnx}{x^2} + \frac{2}{x^2}$$

$$f''(e) = \frac{2 - 2lne}{e^2} + \frac{2}{e^2}$$

$$f''(e) = \frac{2 - 2}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0 \longrightarrow$$ מינימום

ב. מצא את a ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

# פתרון

$$f(x) = (lnx)^2 - 2lnx$$

$$f(e) = (lne)^2 - 2lne$$

$$f(e) = 1 - 2 = -1$$

**לסיכום**: לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(e, -1)$

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

# פתרון

$$f(x) = (lnx)^2 - 2lnx$$

$$(lnx)^2 - 2lnx = 0$$

$$lnx = t$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

## פתרון

$t = 2$

$lnx = 2$

$x = e^2$

$t = 0$

$lnx = 0$

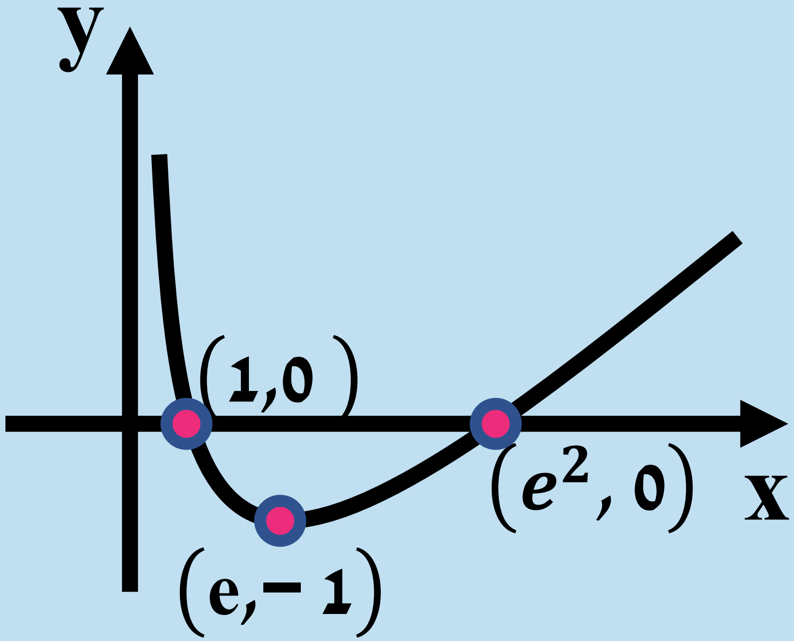
$x = 1$

לכן, נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן: $(1,0)$ ו- $(e^2,0)$

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

# פתרון

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$$

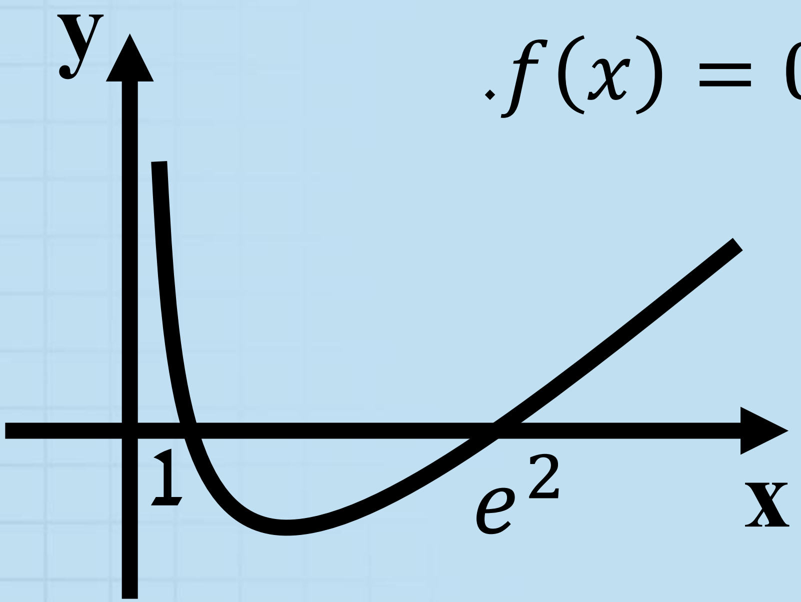


ה. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

# פתרון

נתון כי: $g'(x) = f(x)$

לכן, לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון כאשר $f(x) = 0$.




בסעיף ג' ראינו שמתקיים $f(x) = 0$

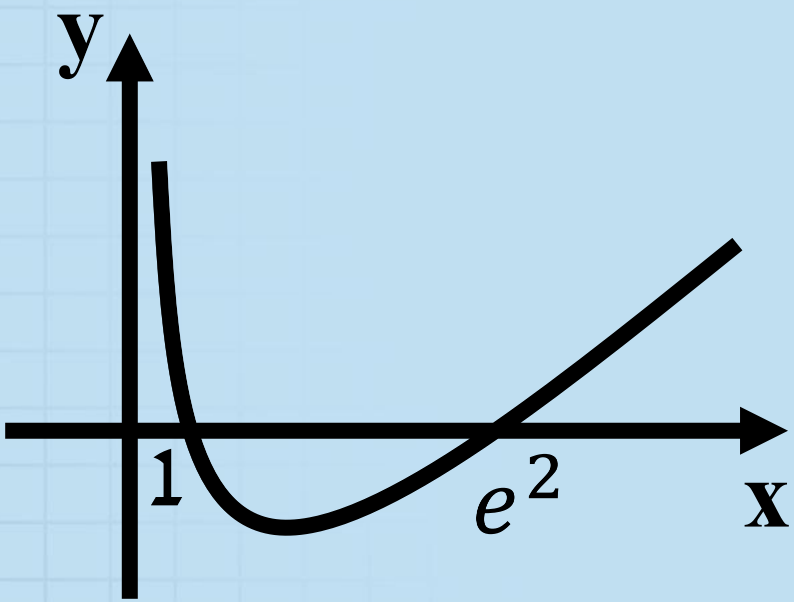
כאשר $x = e^2$, $x = 1$.

כדי לקבוע את סוג הקיצון, ניעזר בגרף של $f(x)$

ה. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$. מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

# פתרון

$$g'(x) = f(x)$$




במעבר דרך $x = 1$ גרף הנגזרת משנה סימן מערך חיובי לערך שלילי ובמעבר דרך $x = e^2$ גרף הנגזרת משנה סימן מערך שלילי לערך חיובי.

**לכן $x = 1$ היא נקודת מקסימום של $g(x)$**
**ו-$x = e^2$ היא נקודת מינימום של $g(x)$**

ו. מצא את שיעורי ה-x של שתי נקודות שעל גרף הפונקציה $g(x)$ **ששיפוע המשיק** בהן לגרף של $g(x)$ הוא 3.

# פתרון

יש למצוא את הנקודות שבהן: $g'(x) = 3$

כלומר, יש למצוא את הנקודות שבהן: $f(x) = 3$

$$f(x) = (lnx)^2 - 2lnx$$

$$(lnx)^2 - 2lnx = 3$$

$$lnx = t \rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

ו. מצא את שיעורי ה-x של שתי נקודות שעל גרף הפונקציה $g(x)$ **ששיפוע המשיק** בהן לגרף של $g(x)$ הוא 3.

# פתרון

$$t = -1$$

$$lnx = -1$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{e}}$$

$$t = 3$$

$$lnx = 3$$

$$\boldsymbol{x = e^3}$$

# בהצלחה