פתרון תרגיל

נקודות קיצון מוחלטות–
פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 304, ת. 8

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

8) נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

א. מצא את שתי נקודות החיתוך x_1 ו-x_2 $(x_1 < x_2)$ של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום $x_1 \le x \le x_2$.

ג. הוכח שלכל x בתחום $1 \le x \le e^2$ מתקיים אי השוויון: $2\ln x - 1 \le (\ln x)^2 \le 2\ln x$.

נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

א. מצא את שתי נקודות החיתוך x_1 ו-x_2 $(x_1 < x_2)$ של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

$$y = (lnx)^2 - 2lnx$$

$$(lnx)^2 - 2lnx = 0$$

$$lnx = t$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

א. מצא את שתי נקודות החיתוך x_1 ו-x_2 $(x_1 < x_2)$ של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

$t = 2$ | $t = 0$

$lnx = 2$ | $lnx = 0$

$x = e^2$ | $x = 1$

נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן: $(1,0)$ ו- $(e^2,0)$

נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

ב. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום $x_1 \le x \le x_2$.

פתרון

יש למצוא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום

$$1 \le x \le e^2$$

נמצא תחילה את הנקודות הפנימיות שבהן הנגזרת מתאפסת.

$$y = (lnx)^2 - 2lnx$$

$$y' = \frac{2lnx}{x} - \frac{2}{x}$$

נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

ב. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום $x_1 \le x \le x_2$.

פתרון

$$\frac{2lnx}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

$$2lnx - 2 = 0$$

$$2lnx = 2$$

$$lnx = 1$$

$$x = e$$

נתונה הפונקציה $y=(\ln x)^2-2\ln x$.

ב. מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה בתחום $x_1 \le x \le x_2$.

פתרון

נחשב את הפונקציה בנקודה $x=e$ ובנקודות הקצה.

$$y=(lnx)^2-2lnx$$

$$f(e)=(lne)^2-2lne=1^2-2\cdot 1=-1$$ → **הערך המינימלי**

$$f(1)=(ln1)^2-2ln1=0^2-0=0$$

הערך המקסימלי

$$f(e^2)=(lne^2)^2-2lne^2=2^2-2\cdot 2=0$$

נתונה הפונקציה $y = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

ג. הוכח שלכל x בתחום $1 \le x \le e^2$ מתקיים אי השוויון: $2\ln x - 1 \le (\ln x)^2 \le 2\ln x$.

פתרון

לסיכום: הערך המינימלי של הפונקציה בתחום שבו $1 \le x \le e^2$ הוא -1.

הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום זה הוא 0.

<u>סעיף ג'</u>:

מהסיכום של סעיף ב' $-1 \le (lnx)^2 - 2lnx \le 0$

נובע כי:

$-1 + 2lnx \le (lnx)^2 \le 2lnx$ מ.ש.ל.

בהצלחה