פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 297, ת. 29

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

29) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + a\ln(x+1)$ בנקודה שבה $x = 0$ הוא -4.

א. מצא את a.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ה. חשב את $f(3)$ והסבר מדוע הפונקציה חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות.

ו. מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?

ז. שרטט את גרף הפונקציה.

ח. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ בתחום $x > -1$. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את a.

פתרון

$$f(x) = x^2 + aln(x+1)$$

$$f'(x) = 2x + \frac{a}{x+1}$$

נתון כי: $f'(0) = -4$

$$2 \cdot 0 + \frac{a}{0+1} = -4$$

$$a = -4$$

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

$$f(x) = x^2 + aln(x+1)$$

תחום ההגדרה הוא: $x + 1 > 0$

$$x > -1$$

<u>סעיף ג':</u> נציב $a = -4$ בפונקציה המקורית וגם בפונקציית הנגזרת, ונקבל:

$$f(x) = x^2 - 4ln(x+1)$$

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1}$$

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$2x - \frac{4}{x+1} = 0$$

$$2x = \frac{4}{x+1}$$

$$2x(x+1) = 4$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad , \qquad \cancel{x_2 = -2}$$

נפסל בגלל תחום ההגדרה

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f''(1) = 2 + \frac{4}{(1+1)^2} > 0 \longrightarrow$$ **מינימום**

$$x = 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 4ln(x+1)$$

$$f(1) = 1^2 - 4ln(1+1) = 1 - 4\ln 2 = -1.77$$

לסיכום:

$(1, -1.77)$ מינימום

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

פתרון

$$f(x) = x^2 - 4ln(x+1)$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 - 4ln1 = 0$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא: (0,0)

ה. חשב את $f(3)$ והסבר מדוע הפונקציה חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות.

פתרון

סעיף ה':

$$f(3) = 3^2 - 4ln4 = 3.45$$

עד כה אנחנו יודעים שהפונקציה עוברת בנקודות: $(0,0)$ ו- $(3,3.45)$.

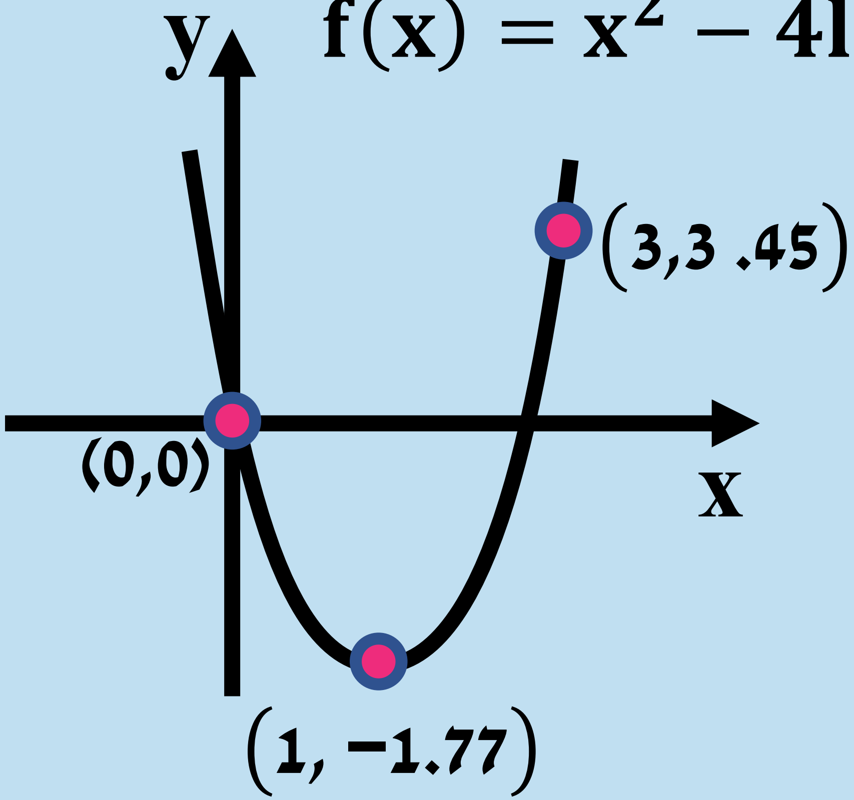
כמו כן, לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה $(1, -1.77)$

נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה על-פי הנתונים הללו.

ה. חשב את $f(3)$ והסבר מדוע הפונקציה חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות.

פתרון

$$f(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$$



בסקיצה רואים שלפונקציה יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

ו.   מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?

פתרון

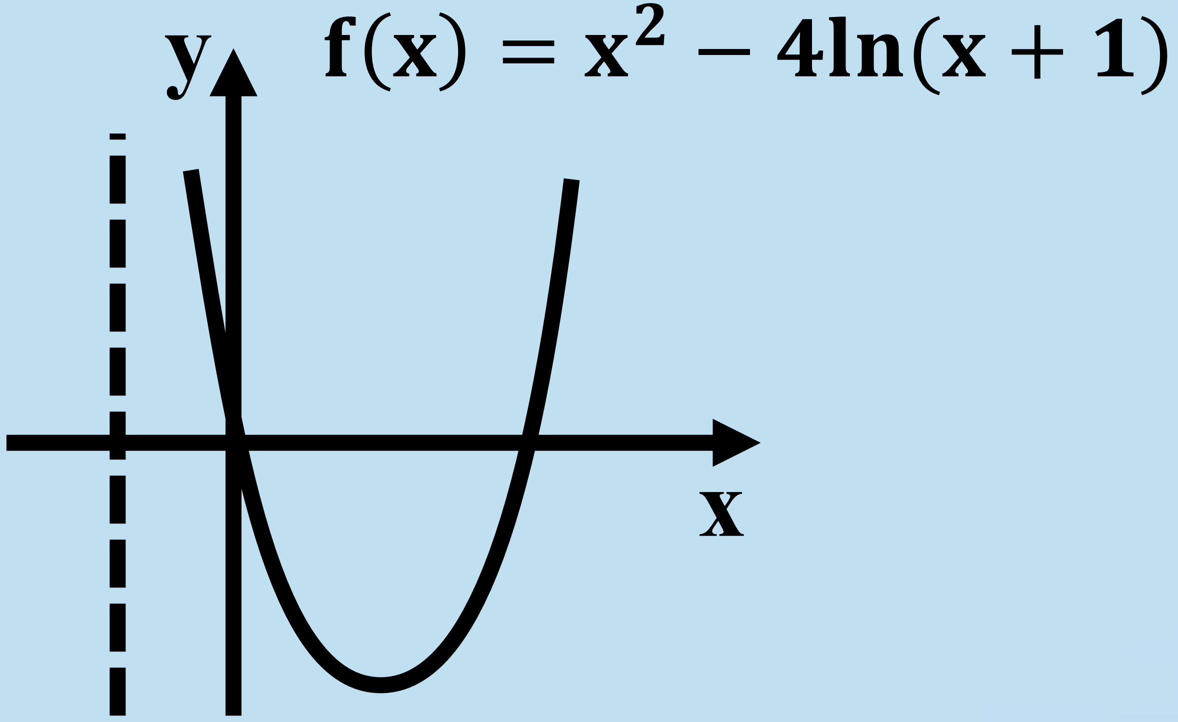
$$f(x) = x^2 - 4ln(x + 1)$$

כזכור תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x > -1$

לכן הישר $x = -1$ הוא האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ז.   שרטט את גרף הפונקציה.

פתרון



ח. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > -1$. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

פתרון

כדי למצוא את השיפוע הנדרש יש לחשב: $g'(1) = f(1)$

$$\mathbf{f(1) = 1^2 - 4ln(1 + 1)}$$

זהו ערך נקודת המינימום של הפונקציה ומצאנו שערכו -1.77

מכאן שהשיפוע המבוקש - ערכו -1.77

בהצלחה