פתרון תרגיל

משפט דה מואבר

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 56, ת. 68

השאלה

68) נתון: $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

א. הוכח: z מקיים את המשוואה $z^{3n} + z^{3m+1} + z^{3k+2} = 0$. ($n$, m ו-k הם מספרים טבעיים).

ב. הוכח, בהסתמך על סעיף א', שהמספר z הוא פתרון של המשוואה $z^2 + z + 1 = 0$.

ג. מצא מספר נוסף z שמקיים את המשוואה של סעיף א'. נמק.

א. הוכח: z מקיים את המשוואה $z^{3n}+z^{3m+1}+z^{3k+2}=0$. ($n$, m ו-k הם מספרים טבעיים).

פתרון

$$x+y\cdot i \to r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{cis}120°$$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\to\theta=120°+180°k=120°$$

רביע שני

א. הוכח: z מקיים את המשוואה $z^{3n}+z^{3m+1}+z^{3k+2}=0$. ($n$, m ו-k הם מספרים טבעיים).

פתרון

$$z^{3n}+z^{3m+1}+z^{3k+2}$$

$$=(\text{cis}120°)^{3n}+(\text{cis}120°)^{3m+1}+(\text{cis}120°)^{3k+2}$$ $(r\text{cis}\theta)^n=r^n\text{cis}\,n\theta$

$$=\text{cis}(360°n)+\text{cis}(360°m+120°)+\text{cis}(360°k+240°)$$

$$=\text{cis}(0°)+\text{cis}(120°)+\text{cis}(240°)$$

$$=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$ מ.ש.ל

ב. הוכח, בהסתמך על סעיף א', שהמספר z הוא פתרון של המשוואה $z^2+z+1=0$.

פתרון

נבחר $\boldsymbol{n = m = k = 1}$:

$$z^{3n} + z^{3m+1} + z^{3k+2} = z^3 + z^4 + z^5 = z^3(1 + z + z^2) = 0$$

$$z^3 = 0 \qquad z^2 + z + 1 = 0$$

$$z = 0$$

מ.ש.ל

ג. מצא מספר נוסף z שמקיים את המשוואה של סעיף א'. נמק.

פתרון

אפשרות ראשונה

$$z^{3n} + z^{3m+1} + z^{3k+2} = 0$$

$$\boxed{z = 0}$$

אפשרות שניה

$$\overline{z^{3n} + z^{3m+1} + z^{3k+2}} = 0$$

$$\overline{z^{3n}} + \overline{z^{3m+1}} + \overline{z^{3k+2}} = 0$$

$$\bar{z}^{3n} + \bar{z}^{3m+1} + \bar{z}^{3k+2} = 0$$

$$\bar{z} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

בהצלחה